

Geometría Analítica

Libro para el Estudiante

*Nivel Medio Superior del
Instituto Politécnico Nacional*

*Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior
del Instituto Politécnico Nacional*

Libro para el Estudiante

Introducción

1. Secuencia de Aprendizaje (Contenido y referencia de su ubicación)
 - Unidad 1. Sistemas de coordenadas, lugares geométricos y ejercicios de graficación
 - Unidad 2. La línea recta
 - Unidad 3. La circunferencia
 - Unidad 4. Secciones cónicas
 - Unidad 5. Ecuaciones cartesianas de las cónicas
 - Unidad 6. La ecuación general de segundo grado
 - Unidad 7. Trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas
 - Unidad 8. Coordenadas y ecuaciones polares
2. Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje
MAPOA
3. Problemas
 - I. Problemas
 - II. Problemas con guía
 - III. Proyectos
4. Ejercicios
5. Lecturas
6. Autoevaluaciones
7. Bibliografía

Introducción

Introducción

El marco institucional

En el Simposio ‘La Prospectiva del IPN y los Desafíos para el Siglo XXI’, que tuvo lugar a fines del siglo pasado, se destacó que el quehacer institucional se debe orientar hacia la creación de un sistema educativo capaz de colocar a todo individuo en la posibilidad de adquirir, actualizar y usar adecuadamente el conocimiento pertinente con un sentido de solidaridad. En particular, al IPN le corresponde atender a las necesidades del país para sustentar su desarrollo científico y tecnológico, por lo que deberá convertirse en un espacio de socialización que integre en sus propuestas formativas la ciencia, la tecnología y el conocimiento con una ética de responsabilidad profesional, en donde el currículo, la pedagogía, la organización, el diseño y la aplicación de las políticas institucionales, tengan la capacidad para actuar consistentemente frente a los escenarios del siglo que comienza.

Para lograr estas metas, el IPN debe mantener un esquema dinámico de acción que lo haga un espacio de formación, aprendizaje, actualización e investigación de alta calidad; un espacio y una comunidad en los que la permanencia y el apoyo se hagan posibles en función del mérito intelectual, la competencia demostrada y el potencial de contribución social, a donde la sociedad y sus instituciones puedan dirigirse para obtener respuestas confiables a sus cuestionamientos. Las nuevas exigencias de acreditación de carreras y de certificación de egresados, imponen una sistematización del desarrollo curricular que obliga a que la reforma académica se constituya en un ejercicio permanente que garantice a los egresados el perfil profesional requerido para los tiempos por venir. Así, la educación que el IPN ofrezca tendrá que superar la imagen tradicional de la adquisición de conocimientos como un fin en sí, para insistir en el desarrollo de aptitudes en el nivel de métodos, de procedimientos y de estrategias de intervención; por lo que habrá que mejorar los programas educativos y de investigación, adecuar las instalaciones, los recursos humanos y la infraestructura, y fomentar el desarrollo tecnológico. En atención a las demandas que la sociedad le plantea, el IPN tiene como eje de su transformación un nuevo perfil profesional que orienta el diseño y la instrumentación de nuevos modelos educativos que proponen una relación adecuada entre los conocimientos, las habilidades práctico-productivas y las actitudes que dotarán a los estudiantes de capacidad emprendedora, responsabilidad, creatividad y flexibilidad en su desempeño profesional.

En su prospectiva 2000-2015 hacia el nuevo Modelo Educativo Politécnico se señala que el reto no considera cambios radicales pero sí contundentes en:

- La reorientación del enfoque y los contenidos de tal manera que el IPN eduque para
 - vivir,
 - aprender,
 - emprender,
 - crear
 - y saber ser;
- la presencia de un esquema cultural que amplíe los horizontes de la ciencia y la tecnología nacionales;
- dar un valor social, económico y ético a los conocimientos resultantes, para estar presente en los circuitos de la distribución mundial de los saberes;
- proveer de servicios y haberes a la población del país;

- y de contribuir a mantener la equidad, la unidad y el bienestar nacionales.

Estos son los desafíos que, en palabras de la propia institución, el IPN reconoce para el presente y el futuro inmediatos.

¿Qué entendemos por enseñar y aprender en el área de matemáticas?

Cuando una persona adopta el papel de estudiante y se encuentra con sus profesores y con sus compañeros en el salón de clases hay un acuerdo implícito, el estudiante está ahí para aprender y el profesor para enseñar. Tu experiencia en la escuela te ha formado una noción intuitiva de lo que estas dos ideas y prácticas significan y de lo que puedes esperar de una clase. Sin embargo, el sistema educativo que hemos heredado no se diseñó para que aprendieras a actuar en forma adaptativa en un ambiente complejo inundado por la tecnología. Sus objetivos no consideraron que fuera necesario, o siquiera posible, que pudieras aprender a interpretar textos no familiares con propósitos variables, construir argumentos convincentes atendiendo varios niveles, comprender sistemas complejos, desarrollar diversos enfoques a los problemas o llevar a buen fin la solución de un problema trabajando en grupo. Pero la sociedad requiere cada vez más una educación que se centre en las llamadas habilidades intelectuales de orden superior. Estas habilidades, de nombre tan elegante, son las que aplicas cuando **tomas decisiones, resuelves problemas, organizas tu propio aprendizaje o haces aportaciones creativas en tus trabajos y actividades**. Pero si quieres aprender a resolver problemas tienes que enfrentarte a verdaderos problemas, si quieres aprender a tomar decisiones, tienes que tomarlas y asumir las consecuencias. . . Todo esto es complicado, pero es lo que haces, y vas a seguir haciendo cada vez más, dentro y, sobre todo, fuera de la escuela. Resnick, conocida investigadora en educación matemática, quien ha estudiado este pensamiento de orden superior, lo caracteriza señalando que

- no es algorítmico, porque las vías por las que circula no están bien definidas previamente,
- es complejo, porque no basta una perspectiva,
- da lugar a soluciones diversas, cada una con sus costos y beneficios,
- requiere de la aplicación de criterios múltiples, en ocasiones contradictorios, que al aplicarse producen juicios matizados,
- va acompañado de una fuerte carga de incertidumbre, no se suele conocer todo lo que se necesita,
- debe auto-regularse,
- comprende la asignación de un significado, encontrando la estructura que subyace al desorden aparente
- y exige un esfuerzo considerable, un trabajo intelectual con propósitos definidos en diversos niveles.

De la Prospectiva del IPN podemos retomar *la orientación que se debe dar al quehacer institucional hacia la creación de un sistema educativo capaz de colocar a todo individuo en la posibilidad de adquirir, actualizar y usar adecuadamente el conocimiento pertinente con un sentido de solidaridad*. Esto es una invitación para contribuir a una reforma educativa imaginativa y muy exigente, que requiere una reconceptualización de lo que significa ‘tener clase’. Para nosotros, tus profesores, ‘enseñar matemáticas’ significará crear

las condiciones que, con tu indispensable participación protagónica, producirán la apropiación del conocimiento, el desarrollo de las habilidades y la formación de las actitudes. ‘Aprender matemáticas’ significará involucrarse en una actividad intelectual exigente, cuya consecuencia final será la disponibilidad de un conocimiento dual: como instrumento y como objeto. Así, ‘saber matemáticas’ significará el desarrollo de estos dos aspectos del conocimiento:

- Como instrumento, el conocimiento matemático está inscrito en un contexto. En este caso es necesario usar las nociones y teoremas matemáticos que considera el programa de la materia para resolver problemas e interpretar situaciones nuevas.
- Como objeto, el conocimiento está descontextualizado y es atemporal. Debes ser capaz de formular definiciones, enunciar y demostrar teoremas e identificarlos como elementos de una disciplina: la matemática.

Los tres pensamientos siguientes nos señalan aspectos que debemos considerar en nuestro aprendizaje:

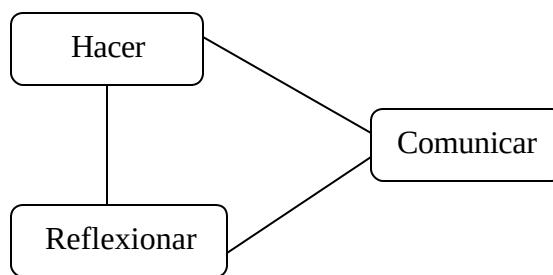
Oigo y olvido,
veo y recuerdo,
hago y comprendo.
(Un viejo proverbio chino)

Hacer . . . y reflexionar acerca de lo que se hace.
(Seymour Papert)

No hay conocimiento verdadero si no se es capaz de comunicarlo
(Así decían los griegos)

Es decir, oyendo, viendo, haciendo... pero además reflexionando y comunicando.

Así nuestro modelo se puede sintetizar, de manera esquemática, en la tríada



Hacer - Reflexionar - Comunicar

El desarrollo de la clase ya no puede ser responsabilidad exclusiva del profesor, sino que debe contar con una nueva actitud del estudiante, que también se responsabiliza y se compromete con su aprendizaje. Juntos podrán discutir y definir las distintas maneras de desarrollar las actividades de aprendizaje, con sus razones, sus ventajas, sus desventajas y sus riesgos.

Las Competencias Básicas y su dimensión matemática

Nuestro marco de referencia lo establece la SEP en sus competencias básicas del estudiante de bachillerato. Las competencias básicas se refieren al dominio, por parte del estudiante, de los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de su vida escolar, laboral o cotidiana, por lo que se considera que deben ser comunes a todos los bachilleratos del país.

Se considera que las competencias básicas que se deben desarrollar durante el paso del educando por el bachillerato son:

- ◆ Expresarse correcta y eficientemente en español, tanto en forma oral como escrita, así como interpretar los mensajes en ambas formas.
- ◆ Manejar la información formulada en distintos lenguajes y discursos (gráficos, matemáticos, simbólicos, de cómputo, etc.).
- ◆ Utilizar los instrumentos culturales, científicos, metodológicos y técnicos, básicos para la resolución de problemas en su dimensión individual y social, con actitud creativa y trabajando individualmente o en grupos.
- ◆ Comprender, criticar y participar racional y científicamente, a partir de los conocimientos asimilados, en los problemas ecológicos, socioeconómicos y políticos de su comunidad, región y del país.
- ◆ Aprender por sí mismo, poniendo en práctica métodos y técnicas eficientes para propiciar su progreso intelectual.
- ◆ Evaluar y resolver las situaciones inherentes a su edad y desarrollo, incluso en lo que se refiere al conocimiento de sí mismo, su autoestima y autocrítica, salud física y formación cultural y estética, a efecto de tomar decisiones que lo beneficien en lo individual y en lo social.
- ◆ Desempeñarse individual o grupalmente de manera independiente en su vida escolar y cotidiana.
- ◆ Integrar los conocimientos de los diferentes campos, en una visión global del medio natural y social, como paso normativo hacia la inter y multidisciplinariedad.

En cada una de las competencias anteriores hay una componente matemática, por lo que en el área de matemáticas se trata de lograr los conocimientos, las habilidades y las actitudes que al articularse con los de las otras áreas te permitan desarrollar significativamente estas competencias. Estos objetivos, que sin duda quieres lograr tanto como nosotros, exigen nuevas modalidades de trabajo, a las que quizás no estás acostumbrado, y pueden causarte conflictos, cierta desesperación, algo de presión, pero, según afirman los expertos como Resnick, los aprendizajes complejos no se logran aislando las componentes visibles, desarrollándolas e integrándolas posteriormente, sino mediante experiencias que ponen en juego, simultáneamente, tanto las habilidades de índole general, como los conocimientos específicos, junto con tu disposición para embarcarte en situaciones con una fuerte carga de riesgo e incertidumbre. Estos ‘buenos propósitos’ son más complejos, lograrlos es una tarea más difícil pero también, creemos, más atractiva e interesante.

La experiencia básica en nuestras clases se definirá por nuestra relación con los problemas. La resolución de un problema en la clase es un proceso muy complejo cuando los problemas que enfrentas son verdaderos problemas. Debido a esta complejidad, los factores que intervienen para que logremos resolver exitosamente un problema, y comprender algo significativo como resultado de la interacción con el problema, son muchos y de distintos niveles. La desatención de uno, o varios, de estos factores puede entorpecer y a veces hacer imposible la solución de un problema o la comprensión que se deriva de la interacción fecunda con el problema. Una componente que influye de manera determinante corresponde a la forma en que las personas interactúan durante la resolución de un problema. Piensa en un laboratorio en el que se realizan algunos procesos complejos, los factores que intervienen en los procesos se administran, se registran continuamente y algunos de ellos se controlan. Así, si queremos crear un ambiente propicio para el desarrollo de las habilidades intelectuales de orden superior es necesario que aprendamos a participar en cada modalidad de trabajo: individual, equipo y grupo completo.

El desarrollo de la tecnología, verdaderamente impresionante en la actualidad, ha perfilado el mundo en que vivimos. Nuestra cultura cuenta ya con una componente matemática que no sólo atañe al especialista sino al ciudadano. Las matemáticas están tan inevitablemente incorporadas a nuestra vida cotidiana que, si hemos sobrevivido, es porque, de alguna manera, hacemos un buen uso de las pocas o muchas matemáticas que sabemos. La herramienta tecnológica por excelencia es la matemática, pero la matemática es una herramienta dinámica porque para cada problema nuevo hay que diseñar una herramienta nueva; basta revisar la gran cantidad de matemáticas nuevas que se han hecho, especialmente en la segunda mitad del siglo pasado, y el papel que han desempeñado en la solución de los problemas importantes de todas las áreas.

Anteriormente, los objetivos que perseguía una sociedad, o una institución, cambiaban cada dos o tres generaciones. Actualmente, los objetivos se revisan constantemente y el cambio forma parte de nuestra realidad cotidiana. Los conocimientos que hace veinte años estaban vigentes en la electrónica, por poner un ejemplo, hoy son casi totalmente obsoletos. Más que conocimientos específicos, que, por supuesto, en cierta medida siguen siendo necesarios, lo que se trata de lograr en la educación de hoy es la capacidad para ser autosuficiente cuando se organiza el aprendizaje que nos exige el ejercicio de la profesión.

Para organizar uno mismo su aprendizaje es necesario desarrollar:

- ◆ las habilidades para usar el conocimiento y articular los conocimientos en pos de un propósito más complejo;
- ◆ las actitudes que nos permiten enfrentar situaciones con una componente importante de incertidumbre;
- ◆ la capacidad para transferir, es decir, aplicar en una situación distinta a aquélla en la que aprendimos, los conocimientos que adquirimos.

El conocimiento debe ser uno de los principales elementos que determinen la relación entre un profesor y sus alumnos. Pero la clase también es un sitio de interacción de costumbres y creencias de cada uno de sus participantes, es conveniente contar con un lenguaje común que nos permita tener un ambiente que propicie la enseñanza y el aprendizaje desde la perspectiva descrita. Así, cada una de nuestras experiencias de

aprendizaje dentro del salón de clases tendrá un doble propósito: aprender a crear un ambiente de trabajo y aprender matemáticas.

El ambiente estará dirigido a promover la independencia del estudiante y la responsabilidad que debe tener en su aprendizaje, a través de:

- ◆ El trabajo individual y en equipo.
- ◆ La resolución de actividades matemáticas.
- ◆ La discusión matemática.
- ◆ La evaluación de tu trabajo y del trabajo de tus compañeros en el equipo y en el grupo.

Cuando se lee del pensamiento de orden superior, sobre tener una actitud participativa, crítica y creativa, se suele decir, “sí, parece deseable y necesario, quiero lograrlo, pero ¿cómo lo hago?”. En la Academia Institucional de Matemáticas hemos reconocido la gran dificultad que hay para lograr estos objetivos y, junto con los Clubes de Matemáticas de varias escuelas, hemos diseñado y adaptado una serie de materiales auxiliares para la organización del aprendizaje, que te servirán para traducir en acciones cotidianas este importante propósito. Estos auxiliares sirven como marcos de referencia compartidos que se usan y comentan constantemente durante las experiencias de aprendizaje. En la medida en que, tanto el profesor como los alumnos, se familiaricen con ellos pueden llegar a constituir un lenguaje común, en el que se pueden expresar algunas de las dimensiones de aprendizaje más importantes. En una sección de este Libro se tiene un comentario un poco más amplio de estos ‘Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje (MAPOA)’. En términos generales, estos auxiliares concretan la expresión ‘responsabilizarse de su aprendizaje’ y contribuyen al logro de la autonomía de los alumnos en la organización de sus propios aprendizajes.

El curso de Geometría Analítica

El IPN tiene fama de ser uno de los mejores bachilleratos en matemáticas de México. La gran mayoría de ustedes seguramente se enorgullece de tener cierta facilidad para las matemáticas. El tercer curso del área de matemáticas se llama Geometría Analítica. Al escuchar el título, lo que viene a nuestra mente es, quizás, un conjunto de figuras y operaciones con áreas y perímetros, en las que suele aparecer el raro p , complicada por un adjetivo ‘analítica’ que evoca algo así como fijarse en los detalles o descomponer para resolver. Sin embargo, conforme realices las actividades que te proponemos te darás cuenta de la clase de conocimiento que queremos que logres, un conocimiento que se asocia con la calidad de su uso. Esto quiere decir que no se trata de padecer cursos, para aprobarlos, que nos exigen realizar operaciones para las que no tenemos ningún significado inmediato, con la promesa de que en un futuro indeterminado acabaremos por aplicarlas. No se trata, entonces, de que ingenieros titulados sean incapaces de resolver los problemas que se les presenten si no tienen una receta, o alguien que los dirija, para hacerlo. Nadie contrata hoy a un profesional para que resuelva un problema que ya está resuelto. Queremos que el criterio básico para juzgar la calidad de nuestro aprendizaje, sea la medida en que somos capaces de darle sentido a las conclusiones que obtenemos al aplicar nuestros conocimientos a la resolución de un problema, ya sea familiar o nuevo; que seamos capaces de descubrir los patrones que relacionan las características de un proceso, de imponer un

modelo matemático, si es necesario; y de evaluar los resultados de su aplicación en función de criterios propios de la situación en la que se originó nuestro problema.

Por supuesto que este tipo de aprendizaje es más difícil. Así como el espacio de nuestra experiencia básica tiene varias dimensiones (una longitud, una anchura, una profundidad y un tiempo), el aprendizaje que queremos lograr tiene varias dimensiones: los conocimientos, las habilidades, las actitudes y la transferencia. Necesitamos aprender a identificar y lograr objetivos en varias dimensiones, a vivir este aprendizaje multidimensional en la escuela, particularmente en nuestras clases de matemáticas.

Según lo estipula tu programa, el objetivo general del curso de Geometría Analítica dice: ***“El curso permitirá al alumno introducirse al estudio de los sistemas de coordenadas y los métodos de la Geometría Analítica, favoreciendo el uso e integración de los conocimientos adquiridos en Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría y, al mismo tiempo, el desarrollo de sus habilidades para el análisis, el razonamiento y la comunicación de su pensamiento, a través de la solución de problemas que le permitan percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico y a su vez facilite en el futuro la asimilación de aprendizajes más complejos y la resolución de problemas en el área tecnológica.”***

El método de trabajo se basa en la problematización continua, la formulación de conjeturas y la revisión sistemática de los conocimientos adquiridos, utilizando técnicas grupales para el análisis y la discusión, así como técnicas expositivas y de indagación, apoyadas con recursos audiovisuales y tecnológicos (computadora, calculadora, etc.), procurando que la relación entre el alumno y el objeto sea constructiva.

Durante todo el desarrollo del curso, se promoverán el análisis, la solución y la discusión de problemas en clase, en un ambiente que favorezca en los alumnos la apreciación de su propio trabajo personal, el de sus compañeros y el de su profesor.

Deberá tenerse presente que la resolución de problemas es la que permite generar e integrar conocimientos, favorece su asimilación y ayuda a distinguir lo esencial de lo menos importante. En este proceso el docente es el organizador de las experiencias de aprendizaje que problematiza, proporciona información y crea códigos de instrucción, de manera que sus alumnos puedan interactuar con los problemas planteados y, mediante esta interacción, avanzar hacia nuevos conocimientos. Es importante que, a lo largo de las actividades, los alumnos desarrollen su capacidad para comunicar su pensamiento y se acostumbren gradualmente a los diversos medios de expresión matemática: lenguajes natural, simbólico y gráfico, así como al uso de tablas y diagramas.

En términos generales, la enseñanza de los temas no debe seguir la exposición magistral, sino fomentar el trabajo en equipos y la exposición de las experiencias logradas por parte de sus integrantes a través de una adecuada planeación de las actividades de aprendizaje.

Las matemáticas que aquí estudiaremos deben ser algo más que la manipulación de expresiones simbólicas y la realización de operaciones desvinculadas de un contexto que les dé sentido a las preguntas que debemos responder. Se deben convertir en una herramienta de modelación en el estudio de situaciones reales, generalmente con el objeto de predecir y de controlar, cuando es éticamente aceptable, algunas de sus características pero, primordialmente, con el objeto de contribuir a explicarnos mejor los fenómenos del mundo en que vivimos.

La organización del ‘Libro para el Estudiante’

En este Libro se incluyen varios tipos de actividades de aprendizaje. Cada actividad tiene un objetivo dentro de toda la red de experiencias consideradas en el curso y se presenta como un apartado en este Libro:

- ◆ Problemas
 - o Problemas
 - o Problemas con guía
 - o Proyectos
- ◆ Lecturas
- ◆ Ejercicios
- ◆ Tareas
- ◆ Autoevaluaciones

El Libro va acompañado de un disco compacto que incluye algunos paquetes y actividades que contribuirán a tu aprendizaje del Álgebra, la Geometría, la Trigonometría y la Geometría Analítica. Las actividades se desarrollan en un ambiente que favorece el autoaprendizaje, la autoevaluación, el trabajo en equipo, el manejo de la incertidumbre, la apropiación de estrategias personales para el manejo de situaciones no familiares, el empleo de formas de pensamiento lógico y el uso de tecnología como una herramienta.

Las actividades están planeadas para que estudiantes y profesores interactúen con diferentes elementos (los problemas, los problemas con guía, los proyectos, los ejercicios, las lecturas y las exposiciones) que brindan las experiencias complementarias que son necesarias para el logro de los objetivos del programa.

La cátedra, disertación o exposición magistral del profesor, merece un comentario aparte. El profesor sólo hará matemáticas frente a ti en ocasiones bien planeadas, cuando estés preparado para beneficiarte de sus explicaciones y participar con preguntas y comentarios, pero en general serás tú quien haga matemáticas con tus compañeros al realizar las actividades de aprendizaje. Las explicaciones del profesor, en general, tendrán como punto de partida el trabajo del grupo. En algunos casos resolverás completamente un problema (es un decir, un problema nunca termina, siempre engendra otros) pero en otras, quizás lo que obtengas de tus afanes sean preguntas bien formuladas, que no es algo desdeñable, sino, por el contrario, algo indispensable para lograr un aprendizaje profundo y duradero, porque le da un sentido personal a una situación que, en principio, nos puede resultar ajena.

En el cuadro siguiente se encuentra una descripción del tipo de actividades que se desarrollarán durante este curso:

Actividad de aprendizaje

Resolución de problemas

¿En qué consiste?

Es una actividad en la que se vinculan las herramientas matemáticas con algunos conceptos utilizando un contexto. Se trata de propiciar la interacción del estudiante con una situación, familiar o no, en la que se usan las matemáticas y se formulan o responden preguntas que contribuyen a la conceptualización de los objetos matemáticos.

En la clase, se propone a los estudiantes un problema, que puede

Desarrollo de Proyectos	contener un cuestionario guía o no, para resolverlo, generalmente, en equipo. El profesor orienta a los estudiantes en la solución del problema. Los alumnos presentan y validan la solución. Es una tarea extraclase de varias etapas que requiere de un esfuerzo coordinado durante varios días o semanas, de la consulta a fuentes de información actualizada como periódicos, revistas o entrevistas a personas vinculadas con alguna situación problemática propicia para un análisis matemático. Los estudiantes investigan, buscan y organizan su trabajo. Consultan con su profesor, quien los orienta y realimenta en cada una de las etapas del proyecto. Se produce un informe que se presenta y discute en el grupo.
Resolución de ejercicios	Se trata de profundizar en el conocimiento de los algoritmos, de comprender por qué funcionan y practicarlos, de ser posible con el auxilio de herramientas tecnológicas, de ser capaces de generarlos, a partir de la solución de los problemas, de explorarlos y generalizarlos. Los estudiantes trabajan, generalmente, en forma individual exponen y validan la solución. El profesor dirige y orienta, reformula e introduce las convenciones de la disciplina.
Lecturas	Se trata de que el alumno interactúe con un texto con el objeto de generar una interpretación global, de identificar la estructura del texto, de reformular sus ideas principales, de comentarlo y conectarlo con el curso, de formular y resolver dudas, todo desde la perspectiva del desarrollo de una cultura matemática. Se realiza generalmente fuera de la clase, dejando sólo la discusión para la clase y, de ser posible, su prolongación en un foro de discusión en la red.
Cátedra	Consiste en retomar o conducir el trabajo de los estudiantes mediante anotaciones pertinentes. Formula nuevos problemas, comenta definiciones, teoremas o demostraciones y su papel en la organización del conocimiento matemático. El profesor retoma las soluciones de sus estudiantes para presentar y discutir nuevos temas así como para formalizar el conocimiento.
Autoevaluación	Es un cuestionario diseñado para que el alumno pueda evaluar sus avances con respecto a un objetivo bien definido. Aquí se encuentran organizadas por unidad. El alumno mismo puede contrastar sus respuestas con las que se incluyen para medir sus logros.

Las secciones están organizadas según el tipo de actividad de aprendizaje. En la primera sección encontrarás la secuencia que corresponde a cada unidad del programa de la asignatura. La organización de las actividades que aquí se presenta constituye una propuesta flexible y fundamentada que puede ser modificada por el profesor.

En cuanto al uso de las herramientas tecnológicas en las actividades de aprendizaje, hay que destacar que, en el área de Matemáticas, este uso se reconoce como un aspecto natural de nuestra sociedad y, por consiguiente, debe estar presente cotidianamente en nuestras

clases, en la medida de lo posible, con el doble propósito de contribuir a fortalecer la comprensión de los alumnos y de permitir que se familiaricen con la interacción mediada por estos dispositivos que caracteriza el ejercicio de las profesiones en la actualidad. Así, en particular, se considera el uso responsable, pero continuo, de las calculadoras con poder de graficación y con sistemas de álgebra computacional, las hojas de cálculo y los programas de computadora diseñados para el aprendizaje y el uso del Álgebra, la Geometría, la Trigonometría y la Geometría Analítica.

Los programas vigentes de matemáticas en el IPN reconocen que un examen escrito no permite evaluar todos los tipos de aprendizajes señalados antes, por ello incorpora la llamada “evaluación continua”, en la cual se ponderan habilidades y actitudes que se van desarrollando paulatinamente.

Programa del Curso de Geometría Analítica

Objetivo general

El curso permitirá al alumno introducirse al estudio de los sistemas de coordenadas y los métodos de la Geometría Analítica, favoreciendo el uso e integración de los conocimientos adquiridos en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría y, al mismo tiempo, el desarrollo de sus habilidades para el análisis, el razonamiento y la comunicación de su pensamiento, a través de la solución de problemas que le permitan percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico y a su vez facilite en el futuro la asimilación de aprendizajes más complejos y la resolución de problemas en el área tecnológica .

En el curso de Álgebra se contemplaron cuatro grandes líneas de desarrollo, que se continuarán tratando y desplegando a lo largo de este curso:

- *Lenguaje algebraico.*
- *Modelación.*
- *Ecuaciones.*
- *Funciones.*

Es importante hacer notar que no es conveniente que haya largos períodos dedicados exclusivamente a la ejercitación de la operatividad, sino que a medida que los alumnos hayan aprendido nuevos procedimientos algebraicos, los utilicen en la resolución de problemas y aplicaciones.

Ya en lo relativo a la Geometría Analítica, cada experiencia de aprendizaje que tengas en este curso, dentro o fuera de la clase, será más provechosa en la medida en la que puedas identificar cómo contribuye al logro de las líneas siguientes:

- *La identificación e interpretación de una cuestión geométrica.*
- *La conexión de entidades geométricas y algebraicas.*
- *La articulación pertinente al representar los dos aspectos de la geometría analítica: del aspecto geométrico al algebraico y del aspecto algebraico al geométrico.*
- *La construcción de la idea de demostración.*
- *La familiarización con los objetos de la geometría analítica (incluyendo propiedades geométricas como las del triángulo, los polígonos, el círculo, y las relaciones de algunos lugares geométricos, como las secciones cónicas).*

- *La articulación de los conocimientos pertinentes en el cálculo geométrico y algebraico (a partir de lo que se conoce, averiguar lo que se ignora, combinando datos y relaciones).*

El programa deberá cumplirse hasta sus últimas unidades, pues éstas preparan a los alumnos para los siguientes cursos. Lo anterior será posible si el docente distingue siempre lo esencial de lo accesorio y no insiste en la ejercitación excesiva de temas de poca importancia para los cuales bastará resolver uno o dos ejemplos en el salón de clases y dejar otros como tarea. También deberán evitarse aquellos tratamientos teóricos superfluos o innecesarios, o tratar de agotar un tema desde el principio, pues el programa ha sido diseñado de tal manera que los conocimientos esenciales puedan utilizarse a lo largo de todo el curso.

«Lineamientos generales para la instrumentación de todo el programa»

Durante todo el desarrollo del curso, se promoverá el análisis, la solución y la discusión de problemas en clase, en un ambiente que favorezca en los alumnos la apreciación de su propio trabajo personal, el de sus compañeros y el de su profesor.

Deberá tenerse siempre presente que son los problemas los que permiten generar conocimiento, favorecen su asimilación y ayudan a distinguir lo esencial de lo menos importante. En este proceso el profesor es un facilitador del aprendizaje, que problematiza, proporciona información y crea códigos de instrucción, al mismo tiempo que organiza las dinámicas de trabajo que permitirán a sus alumnos resolver los problemas planteados y avanzar hacia nuevos conocimientos.

A lo largo de esta actividad, es importante que los alumnos desarrollen su capacidad para la comunicación de su pensamiento y se acostumbren gradualmente a los diversos medios de expresión matemática: los lenguajes natural, simbólico y gráfico.

Unidad 1. Sistemas de coordenadas, lugares geométricos y ejercicios de graficación.

Objetivo

Que el estudiante, amplíe y enriquezca sus conocimientos sobre el concepto de sistema de coordenadas y, apoyado en éstos, desarrolle habilidades para analizar, interpretar y describir las relaciones existentes entre subconjuntos de puntos en el plano y las expresiones algebraicas que los definen. Iniciándose así en la comprensión de los problemas fundamentales de la geometría analítica.

Temas

1.1 Sistemas de coordenadas.

1.1.1 Revisión de coordenadas rectangulares: abscisa y ordenada de un punto; distancia entre dos puntos; punto medio y división de un segmento en n partes iguales.

1.1.2 Primeros ejemplos para introducir coordenadas polares.

1.2 Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica.

1.2.1 Localizar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación o condición algebraica dada.

1.2.2 Encontrar la ecuación de una curva o lugar geométrico descrito por distintos medios, por ejemplo, como el corte de un sólido por un plano (secciones); por el movimiento de una partícula (trayectorias).

1.3 Subconjuntos y regiones del plano.

1.3.1 En coordenadas cartesianas:

-Semiplanos:

$$x > 5, y < -2, x > y, y > 2x + 5, \dots$$

-Franjas

$$-3 < x < 4, 2 < y < 6, x < y < k + 1, \dots$$

1.3.2 En coordenadas polares:

-Sectores:

$$p/4 < q < p/2, 0 < q < p/6, r < 5, \dots$$

-Círculos, exteriores de círculos, anillos:

$$r \leq 5, r \leq 3, r \geq 7, 2 \leq r \leq 5, \dots$$

1.4 Ejemplos y ejercicios de graficación de expresiones de las formas:

$$ax^2 + by + c = 0 ; y = ax^2 + by + c ; ax^2 + by^2 = c$$

1.4.1 Estudio de familias de la forma:

$$y = mx + b, y = a(x - c)^2 + b$$

1.4.2 Ejemplos de coordenadas polares:

$$r = 2q, r = \sin 2q, r = q \sin 2q$$

Unidad 2. La línea recta.

Objetivo

Que el estudiante identifique y explore las propiedades que definen a una recta, así como su correspondiente representación analítica; que desarrolle habilidades para representar geométricamente una recta a partir del análisis de sus parámetros; que emplee las propiedades de la representación analítica de la recta en la solución de problemas geométricos; que descubra las ventajas de una ubicación conveniente de los ejes en la simplificación de las expresiones y los cálculos algebraicos.

Temas

2.1 La recta como una curva de pendiente constante; pendiente de una recta.

2.2 Condiciones que determinan una recta: deducción de la ecuación de la recta dados dos puntos por los que pasa, dada su pendiente y un punto por el que pasa.

2.3 Ecuación general de la recta, formas especiales de la ecuación de la recta: punto pendiente y simetría.

2.4 Posiciones relativas de dos rectas, rectas secantes y paralelas; intersección de dos rectas, condiciones de perpendicularidad y paralelismo.

2.5 Aplicaciones.

2.5.1 Distancia de un punto a una recta.

2.5.2 Demostración analítica de teoremas de geometría (concurrency de medianas, alturas, mediatrices y bisectrices de un triángulo, colinealidad del baricentro, ortocentro e incentro; etc.)

Unidad 3. La circunferencia.

Objetivo

Que el estudiante deduzca la ecuación de la circunferencia e incorpore gradualmente la traslación de ejes como una técnica útil para simplificar expresiones y deducciones

analíticas; que deduzca y aplique la ecuación de la circunferencia en la solución de problemas muy diversos e interesantes.

Temas

3.1 Ecuaciones ordinarias de la circunferencia.

3.1.1 Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r .

3.1.2 Ecuación de la circunferencia con radio r y centro en cualquier punto (h, k) .

3.2 translación de ejes; aplicaciones a la simplificación de ecuaciones; a la obtención de la ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen.

3.3 Ecuación general de la circunferencia; ejercicios de la forma general a la ordinaria.

3.4 Problemas de aplicación.

3.4.1 Obtener la ecuación de la circunferencia dados el centro y un punto por el que pasa; dados el centro y una recta tangente; dados tres puntos por los que pasa.

3.4.2 Problemas de lugares geométricos, por ejemplo, la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados a dos puntos fijos es constante, de los puntos tales que la razón de sus distancias a dos puntos fijos es una constante, etc.

3.4.3 Cálculo de tangentes a la circunferencia.

Unidad 4. Secciones cónicas.

Objetivo

Que a partir del análisis geométrico de las cónicas, el estudiante identifique sus rasgos característicos, conozca la equivalencia entre las definiciones bifocal y como secciones de un cono y se familiarice con las relaciones entre sus elementos, como un antecedente al estudio analítico de estas curvas.

Temas

4.1 Las cónicas como secciones de un cono, o cilindro, por un plano parábola, elipse, hipérbola y cónicas degeneradas.

4.2 definición bifocal de las cónicas; trazado, equivalencia entre las definiciones bifocal y como secciones de un cono.

4.3 Elementos de una cónica: vértices, lado recto y ejes; relaciones entre la distancia focal y la longitud de los ejes; eje agudo y asíntotas a una hipérbola. Excentricidad de una cónica.

Unidad 5. Ecuaciones cartesianas de las cónicas.

Objetivo

Que el estudiante desarrolle habilidades para pasar de la definición de un lugar geométrico a una ecuación que lo representa, permitiéndole enriquecer su comprensión de las relaciones entre el álgebra y la geometría y, en particular, reconocer las relaciones existentes entre los aspectos relevantes de una gráfica y los parámetros de la ecuación correspondiente, siempre que la ecuación se encuentre escrita en la forma conveniente.

Temas

5.1 Deducción de las ecuaciones ordinarias de las cónicas con vértice y centro en el origen.

5.1.1 Parábola

5.1.2 Elipse

5.1.3 Hipérbola

5.2 Deducción de las ecuaciones ordinarias de las cónicas con vértice y centro fuera del origen, utilizando una translación de ejes.

5.3 Ecuaciones generales de las cónicas. Características de cada ecuación según la cónica a la que pertenece, reducción de la forma general a la ordinaria.

5.4 Problemas y aplicaciones diversas.

Unidad 6. La ecuación general de segundo grado.

Objetivo

Que el estudiante, a partir del análisis de la ecuación general de segundo grado y su transformación por medio de una traslación y una rotación de ejes, aprenda que toda ecuación de este tipo representa una cónica y sepa como reconocerla, se familiarice con las rotaciones y, junto con las traslaciones, las utilice para simplificar expresiones algebraicas y encuentre e identifique la cónica que pasa por cinco puntos dados, permitiéndole esto relacionar los rasgos de la curva con los parámetros de la ecuación

Temas

6.1 Rotación de ejes; aplicación a la eliminación del término cruzado en una ecuación de segundo grado.

6.2 Ejercicios de reducción de ecuaciones de segundo grado a la forma ordinaria de las cónicas, mediante una combinación de rotación y translación.

6.3 Ejemplos para encontrar la cónica que pasa por cinco puntos.

Unidad 7. Trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas.

Objetivo

Que el estudiante asocie el estudio de las ecuaciones paramétricas con el estudio del movimiento curvilíneo, desarrolle habilidad para representar gráficamente una trayectoria dadas unas ecuaciones paramétricas, así como para eliminar el parámetro y encontrar la ecuación cartesiana correspondiente.

Temas

7.1 Coordenadas de un punto que se mueve en una trayectoria curvilínea, ecuaciones paramétricas del movimiento.

7.2 Ejercicios de graficación trazado punto a punto de una trayectoria dadas sus ecuaciones paramétricas, por ejemplo:

a) $x = 3t + 1; y = 2t - 3$

b) $x = t^2 + 1; y = t^2 - 1$

c) $x = 2t; y = t^2$

d) $x = \cos q; y = \sin q$

e) $x = 2 \cos q; y = 3 \sin q$

f) $x = \sin q; y = \cos(2q)$

7.3 Eliminación del parámetro. Ecuación cartesiana de una trayectoria dada paramétricamente.

7.4 Tiro parabólico (lanzamiento de un proyectil); ecuaciones paramétricas de la circunferencia y la elipse.

7.5 Ejemplos de otras curvas: la cicloide, las cicloides alargada y acortada; la hipocicloide y la epicicloide.

Unidad 8. Coordenadas y ecuaciones polares.

Objetivo

Que el estudiante sea capaz de bosquejar la grafica de ecuaciones polares, así como pasar de una ecuación polar a una cartesiana y viceversa; que desarrolle criterios para elegir el sistema de coordenadas más adecuado para la descripción analítica de una curva, al mismo tiempo que deduce las ecuaciones polares de algunas curvas, sin limitarse a la recta, la circunferencia y las cónicas.

Temas

8.1 Trazado de curvas en coordenadas polares.

8.1.1 Espirales: $r = kq$, $r = k / q$

8.1.2 Rosas: $r = a \cos kq$, $r = a \sin kq$

8.1.3 Otras: $r = q \sin kq$, $r = a + b \sin kq$

8.2 Relaciones entre coordenadas polares y rectangulares; paso de una ecuación polar a una cartesiana y viceversa.

8.3 Ecuaciones polares de la recta, la circunferencia y las cónicas.

Bibliografía

Autores	Título	Editorial	Edición
Filloy, E. y Hitt, F.	Geometría Analítica	Grupo Editorial Iberoamérica	1ª Ed. 1997, México DF
Middlemiss Ross R	Geometría Analítica	Mc Graw-Hill	4ª Ed. 1992, México DF
Lehmann Charles H.	Geometría Analítica	Limusa	15ª Ed. 1990, México, DF
Rider, R. Paul	Geometría Analítica	Montaner y Simon SA	10ª Ed. 1962, España
Efimov, N.	Curso Breve de Geometría Analítica	Editorial Mir	7ª Ed. 1969, URSS
Kletenik, D.	Problemas de Geometría Analítica	Editorial Mir	4ª Ed. 1979, URSS
Selby Peter M	Teoría y Práctica Geometría Analítica	Sistemas Técnicos de Edición S.A.	1ª Ed. 1990, México
Shilov, G.E. / Natanson, I.P.	Cómo construir gráficas./ Los problemas más sencillos de máximos y mínimos.	Editorial Mir.	1ª Ed. 1976, URSS
Gelfand, I., et al	El método de coordenadas	Editorial Mir.	1ª Ed. 1987, URSS
Vasíliev, N.B. y Gutenmájer, V.L.	Rectas y curvas	Editorial Mir.	1ª Ed. 1980, URSS
SMSG (School Mathematics Study Group)	Geometría Analítica	SMSG	Edición preliminar, 1967, Stanford, California
De la Borbolla F.J. y L.	Problemas y ejercicios de Geometría Analítica	UTEHA	México, DF

Wernick, William.

Geometría Analítica

Publicaciones
Cultural SA

1ª Ed. 1970,
México, DF.

ASPECTO A EVALUAR		DEFINICIÓN OPERATIVA	FORMA DE EVALUACIÓN	EVALUACIÓN	
				INDIRECTA	DIRECTA
Potencia matemática		Habilidad y capacidad de usar la matemática para resolver problemas en diferentes áreas de estudio	– Exámenes escritos – Exposición y resolución de problemas – Trabajos extraclases	X X X	X
Resolución de Problemas		Capacidad para resolver problemas y plantearlos, considerando diversas alternativas para resolver problemas, un plan para resolver el problema, interpretar y comprobar resultados, y generalizar soluciones.	– Exámenes escritos – Exposición y resolución de problemas – Trabajos extraclases	X X X	X
Razonamiento		Capacidad de reconocer patrones, estructuras comunes y formular conjeturas	– Exámenes escritos – Exposición – Interrogatorios – Entrevistas	X X X X	X
Comunicación		Capacidad del alumno para expresar ideas matemáticas en diversas formas: hablada, escrita y gráfica.	– Exámenes escritos – Interrogatorios – Trabajos extraclases	X X X	X
Actitud Matemática		Confianza en el uso de las matemáticas para resolver problemas; comunicar ideas y razonar, probar métodos alternativos para la resolución de problemas; la perseverancia de llegar hasta el fin de la tarea matemática; el interés, la curiosidad, la inventiva de los alumnos para hacer matemáticas; el reconocer el valor que tienen las matemáticas en nuestra cultura, como herramienta y como lenguaje.	– Exámenes escritos – Observación – Entrevistas – Interrogatorios – Trabajo en equipo	X X X X X	X X
PERIODO	UNIDADES TEMÁTICAS	PLAN DE EVALUACIÓN			
1	1, 2 y 3	Examen departamental 60% Evaluación continua 40%	El examen departamental estará conformado por problemas que se evaluarán tomando en cuenta: 1. la comprensión del problema 2. la planeación de una solución		
2	4, 5 y 6	Examen departamental 60% Evaluación continua 40%			

3	7 y 8	Examen departamental 60% Evaluación continua 40%	3. la obtención de una respuesta En la evaluación continua se tomará en cuenta el modelo PER para propiciar que los alumnos se responsabilicen de su propio aprendizaje
---	-------	---	--

Secuencias de
Actividades de Aprendizaje
del Curso de Geometría
Analítica

Unidad 1. Sistemas de coordenadas, lugares geométricos y ejercicios de graficación

Que el estudiante, amplíe y enriquezca sus conocimientos sobre el concepto de sistema de coordenadas y, apoyado en éstos, desarrolle habilidades para analizar, interpretar y describir las relaciones existentes entre subconjuntos de puntos en el plano y las expresiones algebraicas que los definen. Iniciándose así en la comprensión de los problemas fundamentales de la geometría analítica.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
1-3	Gráficas y Descripciones	Dame tus coordenadas Las razones de un segmento	Inecuaciones	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 1 a 36. Resolver los ejercicios complementarios pares del 1-22 al 1-32, pp 17 y 18. Resolver los ejercicios complementarios del 2-17 al 2-23, p 37.	Geometría Analítica, ¿qué es y por qué se estudia?	
4-5	Un paseo por automóvil	Sin segundas intenciones				Pregunta y responde
5-7	La mosca I Un juego de básquetbol televisado	El granjero Una historia de dos ciudades	Geometría analítica	Leer haciendo las páginas 38 a 58. Resolver los ejercicios complementarios impares del 3-19 al 3-34, p 59.		
8-10		Mejor muerto que			Encontrando el	

siervo

camino

Unidad 2. La línea recta

Que el estudiante identifique y explore las propiedades que definen a una recta, así como su correspondiente representación analítica; que desarrolle habilidades para representar geoméricamente una recta a partir del análisis de sus parámetros; que emplee las propiedades de la representación analítica de la recta en la solución de problemas geométricos; que descubra las ventajas de una ubicación conveniente de los ejes en la simplificación de las expresiones y los cálculos algebraicos.

<u>Horas</u>	<u>Problemas</u>	<u>Problemas con guía</u>	<u>Actividades Internet</u>	<u>Ejercicios</u>	<u>Lecturas</u>	<u>Proyectos</u>
11-13	<u>Epifanía</u>	<u>¡Queremos rock!</u> <u>Tienda de videos</u> <u>Club de Tenis</u> <u>Esperanza de vida</u>	<u>Ecuaciones de la recta</u>	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 64 a 78. Resolver los ejercicios complementarios pares del 4-12 al 4-33, pp 78 y 79.	<u>¿Por qué las demostraciones?</u>	
14-16	<u>Lugares geométricos 1</u>	<u>Movimiento lineal I</u> <u>Movimiento lineal II</u>	<u>Programación Lineal</u>		<u>Carta de amor a un trapezoide</u>	
17-19		<u>El librero</u> <u>¿Misión posible?</u>	<u>Proporcionalidad Geométrica</u>			<u>La ciencia para todos</u>

20-21	<u>Los tinos</u>	Leer haciendo las páginas 81 a 94. Resolver los ejercicios complementarios impares del 5-9 al 5-18, pp 93 y 94.	Reducir a escala
-------	------------------	--	-------------------------

Unidad 3. La circunferencia

Que el estudiante, deduzca la ecuación de la circunferencia e incorpore gradualmente la traslación de ejes como una técnica útil para simplificar expresiones y deducciones analíticas; que deduzca y aplique la ecuación de la circunferencia en la solución de problemas muy diversos e interesantes.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
22-23	Apagar el fuego a como de lugar	Jardinería	Circunferencia	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 95 a 106. Resolver los ejercicios complementarios pares del 6-11 al 6-16, p 106.	Diálogos 1	
24-26	El ave viajera	Ver para saber		Leer haciendo las páginas 111 a 127. Resolver los ejercicios complementarios impares del 7-15 al 7-21, pp 127 y 128.		
27-29	Razón de áreas de dos círculos	Esfera inscrita en un cono circular recto	Los dos primeros puntos de la sección Tangentes I		Un argumento circular	La Matemática, ¿se descubre o se inventa?

Unidad 4. Secciones cónicas

Que a partir del análisis geométrico de las cónicas, el estudiante identifique sus rasgos característicos, conozca la equivalencia entre las definiciones bifocal y como secciones de un cono y se familiarice con las relaciones entre sus elementos, como un antecedente al estudio analítico de estas curvas.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
30-31	El pozo y el río	Sismología	Cónicas			
32-33	La aldea Circunferencia tangente a otra y que pasa por un punto interior a esta última	Campo petrolero Sácale punta	La Parábola 1	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 111 a 127. Resolver los ejercicios complementarios pares del 7-22 al 7-28, pp 127 y 128.		
34-35	Circunferencia tangente a otras dos	Venta de calzado	La Elipse 1			
36-37	Estruendo de un cañón Ensordecedor disparo de un rifle e impacto de una bala	Lo Recto de las Cónicas	La Hipérbola 1	Leer haciendo las páginas 130 a 140. Resolver los ejercicios complementarios del 8-6 al 8-7, p 140.	Costo de los discos compactos	El que no conoce a Dios

Unidad 5. Ecuaciones cartesianas de las cónicas

Que el estudiante desarrolle habilidades para pasar de la definición de un lugar geométrico a una ecuación que lo representa, permitiéndole enriquecer su comprensión de las relaciones entre el álgebra y la geometría y, en particular, reconocer las relaciones existentes entre los aspectos relevantes de una gráfica y los parámetros de la ecuación correspondiente, siempre que la ecuación se encuentre escrita en la forma conveniente.

<u>Horas</u>	<u>Problemas</u>	<u>Problemas con guía</u>	<u>Actividades Internet</u>	<u>Ejercicios</u>	<u>Lecturas</u>	<u>Proyectos</u>
38-39	<u>Masa líquida rotante</u> <u>Bóveda de murmullo</u>	<u>Diseño de un puente</u>	<u>La Parábola 2</u>		<u>La “irresponsabilidad matemática” de los alumnos</u>	
40-42	<u>Construcción de un puente</u> <u>El barco bien librado de un puente</u>	<u>Reflector elíptico</u>	<u>La Elipse 2</u>	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 158 a 172. Resolver los ejercicios complementarios del 10-12 al 10-15, p 173.		
43-45			<u>La Hipérbola 2</u>			<u>Enseña y aprende</u>
46-48	<u>La mosca II</u> <u>La fuente</u>	<u>Juego de video</u>		Leer haciendo las páginas 144 a 156. Resolver los ejercicios complementarios pares del 9-12 al 9-22, p 157.	El rescate	

Unidad 6. La ecuación general de segundo grado

Que el estudiante, a partir del análisis de la ecuación general de segundo grado y su transformación por medio de una traslación y una rotación de ejes, aprenda que toda ecuación de este tipo representa una cónica y sepa como reconocerla, se familiarice con las rotaciones y, junto con las traslaciones, las utilice para simplificar expresiones algebraicas y encuentre e identifique la cónica que pasa por cinco puntos dados, permitiéndole esto relacionar los rasgos de la curva con los parámetros de la ecuación.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
49-50	Ecuación intrínseca de la parábola, elipse e hipérbola	Cónicas	La ecuación general de 2º grado		El Número Pi	
51-52	Una parábola rotada Una elipse rotada	Trayectoria de un barco		Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 192 a 204. Resolver los ejercicios complementarios del 12-12 al 12-15, p 204.		
53-54	Una hipérbola rotada	Las otras cónicas	Excentricidad			
55-56	Cinco puntos	Telescopio astronómico		Leer haciendo las páginas 192 a 204. Resolver los ejercicios complementarios del 12-16 al 12-21, pp 204 y 205.	Un gran salto	La cultura matemática

Unidad 7. Trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas

Que el estudiante asocie el estudio de las ecuaciones paramétricas con el estudio del movimiento curvilíneo, desarrolle habilidad para representar gráficamente una trayectoria dadas unas ecuaciones paramétricas, así como para eliminar el parámetro y encontrar la ecuación cartesiana correspondiente.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
57-58	Un gato intrépido		Problemas con rectas en paramétricas		Problemas por resolver, problemas por demostrar	
59-60	Lugares geométricos 2	El pistón		Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Leer haciendo las páginas 175 a 187. Resolver los ejercicios complementarios del 11-12 al 11-15, pp 187 y 188.		
61-62	¿Jonrón?					
63-64	Lugares geométricos 3		Lugares Geométricos	Leer haciendo las páginas 175 a 187. Resolver los ejercicios complementarios del 11-16 al 11-19, p 188.	El mismo de nuevo	

Unidad 8. Coordenadas y ecuaciones polares

Que el estudiante sea capaz de bosquejar la grafica de ecuaciones polares, así como pasar de una ecuación polar a una cartesiana y viceversa; que desarrolle criterios para elegir el sistema de coordenadas más adecuado para la descripción analítica de una curva, al mismo tiempo que deduce las ecuaciones polares de algunas curvas, sin limitarse a la recta, la circunferencia y las cónicas.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyectos
65-66	Pétalos	El micrófono	Las funciones trigonométricas	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Resolver el Examen 4 de la p 206.	Problemas de rutina	
67-68	Intersecciones					
69-70	Cometa	Ecuación polar de una cónica	Curvas en polares	Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby Resolver el Examen de mitad de periodo de las pp 141 y 142.		
71-72			Cómo dibujar gráficas		Una exhaustiva averiguación	

Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje

Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje

Introducción

Materiales Auxiliares para la Organización del Aprendizaje (MAPOA)

Para lograr el aprendizaje integral y multidimensional que aquí proponemos es necesario que todos nos hagamos corresponsables. Esta responsabilidad compartida apunta al fortalecimiento de nuestra autonomía. A lo largo de las sesiones discutiremos explícitamente algunos de los materiales para la organización del aprendizaje y procuraremos convencernos de la importancia de su uso cotidiano.

Estos materiales se encuentran en la Academia de Matemáticas de tu CECyT, además de en el disco compacto que acompaña a esta Guía, y sirven como un marco de referencia compartido al que recurriremos constantemente durante el curso. En la medida en que nos familiaricemos con ellos pueden llegar a constituir un lenguaje común, con el que podemos hablar acerca de algunos aspectos importantes de tu aprendizaje.

En términos generales, estos materiales auxiliares concretan la expresión “responsabilizarse de su aprendizaje” y contribuyen al logro de nuestra autonomía en la organización de nuestros propios aprendizajes.

Los auxiliares para la organización del aprendizaje son los siguientes:

Para entrar en materia

En este breve texto se discute el aprendizaje de la resolución de problemas en el contexto de las habilidades intelectuales de alto nivel y se propone un modelo de aprendizaje esquemático, “hacer, reflexionar y comunicar”, que contrasta con el tradicional “oír, ver y reproducir”. Aquí se presenta por primera vez la idea del problema como el mejor medio de establecer una relación fecunda con una disciplina. Esta idea se discute más detalladamente en “La Heurística”.

El modelo PER

En el modelo de organización del aprendizaje PER (Propósito, Estrategia, Resultado) de Selmes, investigador especializado en las habilidades de estudio, se presenta un marco de referencia para estructurar las actividades de aprendizaje. Se invita a administrar los dos enfoques que se proponen, el superficial y el profundo, con el objeto de formarse un estilo independiente.

La Heurística

En este documento de Schoenfeld, investigador especializado en la resolución de problemas matemáticos, se presenta una estrategia de resolución de problemas, acompañada de un diagrama de flujo y de una tabla que incluye las heurísticas de uso más frecuente.

El material consta de tres partes:

“La estrategia”.

“Algunas heurísticas de uso frecuente”.

“Una síntesis esquemática de la estrategia de resolución de problemas”.

El portafolios

El portafolios, que es un recipiente en el que se acumula, organiza y reorganiza todo lo que se produce en las actividades, en forma individual o en equipo, así como los comentarios y extensiones de estos productos.

El portafolios aporta información sobre:

el pensamiento del alumno,

su crecimiento en el tiempo,

las conexiones que establece,

el punto de vista del alumno acerca de su quehacer matemático,

el proceso de resolución de problemas.

La mejor manera de convencernos de la utilidad del portafolios, de conocer su potencial y advertir sus limitaciones, es usarlo para recopilar todos los reportes de resolución de problemas, los planes, los reportes de las experiencias, los comentarios de las lecturas, etcétera.

Las fichas

Algunos comentarios y sugerencias sobre la elaboración del reporte, el trabajo en equipo, la discusión matemática, el control durante la resolución de problemas en el salón de clases y la elaboración de controles de lectura se presentan en forma de fichas.

A partir de los resultados de las investigaciones de algunos educadores se proponen una serie de comentarios, para su discusión, sobre diversos aspectos de las sesiones de resolución de problemas.

Los formatos de evaluación

La evaluación de nuestro aprendizaje debe estar basada en los objetivos educativos a corto, mediano y largo plazos y, por supuesto, en los objetivos de nuestro curso, así mismo debe apuntar a mejorar nuestro método de aprendizaje y a reforzar nuestro conocimiento de nosotros mismos. Estos formatos establecen criterios que nos permitirán evaluar de una forma más integral nuestro propio trabajo y el de nuestros compañeros.

Algunos materiales auxiliares para la organización del aprendizaje que puedes consultar con provecho son:

Propósitos y Competencias Básicas del Estudiante de Bachillerato

Para entrar en materia

El Modelo PER

El enfoque profundo y sus características

El enfoque superficial y sus características

Cuestionario de autoevaluación

Algunos enunciados sobre la organización

La Heurística

Heurísticas de uso frecuente.

Síntesis esquemática de la estrategia de resolución de problemas

El Portafolios

Un diagrama del portafolios

Especificaciones adicionales sobre el contenido del portafolios como escaparate

Las Fichas

Recomendaciones para el trabajo individual

Recomendaciones para la discusión general

Recomendaciones para el trabajo en equipo

Recomendaciones para la elaboración del reporte de la actividad

¿Qué es un problema?

¿Qué es un ejercicio?

Antes de entregar tu reporte, ¡revisalo!

Cómo se construye un mapa conceptual

Las actividades de comprensión de Perkins

Guía para la elaboración de informes de lectura

Los Formatos de Evaluación

Evaluación de presentaciones

Autoevaluación de reportes

Las tres preguntas reveladoras de Mosteller

Autoevaluación del curso

Autoevaluación de habilidades, actitudes y valores

A continuación te presentamos un plan que te permitirá revisar e incorporar estos materiales en tus actividades de aprendizaje de matemáticas (y otras materias). En este plan se incluyen algunas cápsulas que puedes discutir con tus compañeros y profesores. Además te hacemos algunos comentarios adicionales y te sugerimos algunas formas para trabajarlos con provecho.

Unidad	MAPOA
1	Introducción. Las Matemáticas en mi vida.
2	Las secciones del Portafolios. Las fichas del Modelo PER.

3	Autoexamen sobre tu manera de pensar. Profesor ¿estoy bien?
4	Las fichas.
5	La Heurística.
6	Antes de entregar tu reporte revísalo. Autoevaluación de reportes.
7	Mapas conceptuales.
8	Autoevaluación de actividades, actitudes y valores. Portafolios como escaparate.

Las Matemáticas en mi vida

(Una autobiografía matemática)

Escribe un texto titulado "Las matemáticas en mi vida". Toma en cuenta los puntos siguientes:

1. Relato escrito en un mínimo de dos cuartillas.
2. Usa el esquema de las dimensiones del aprendizaje (conocimientos, habilidades, actitudes y transferencia) para la descripción de los que sabes de matemáticas y trata explícitamente lo relativo a la forma en que lo usas fuera de tu clase de matemáticas.
3. Haz una evaluación de tu último curso de matemáticas, evalúa a tu profesor y autoevalúate.
4. Describe lo que consideras buenas y malas clases, explica por qué las calificas así.
5. Incluye el aspecto emocional.
6. Describe la actitud de tus familiares con respecto a las matemáticas.
7. Trata lo que han sido las matemáticas en tu pasado, lo que son en tu presente y lo que esperas que sean en tu futuro.
8. ¿Qué espero de mi profesor?
9. ¿Qué estoy dispuesto a hacer para aprender? Especifica.
10. ¿Qué son las matemáticas?
11. ¿Cómo aprendo matemáticas?
12. ¿De dónde salieron las matemáticas?
13. Incluye tus opiniones y en caso de que consultes algún libro, especifica la fuente.

¿Qué es el portafolios? ¿Qué debes tener en tu portafolios?

El portafolios es un instrumento en el que se pretende evaluar una diversidad de registros que reflejan aspectos distintos del aprendizaje de los alumnos, que parece muy adecuado para hacer una evaluación continua y además para hacer cortes de evaluaciones acumulativas e integradoras tantas veces como se requiera, recuperando el propósito original de la evaluación que es partir de elementos confiables para mejorar tanto el aprendizaje del alumno como la enseñanza del profesor. (Consulta el diagrama de tus materiales auxiliares para la organización del aprendizaje.)

Presentación del documento: “El modelo PER”

Entre los materiales auxiliares hay una introducción al modelo de organización y evaluación del aprendizaje propio llamado PER (Propósito, Estrategia, Resultado). Recorta y enmica las fichas que incluye.

La aplicación cotidiana del modelo PER te ayudará a desarrollar una actitud más reflexiva en tus actividades de aprendizaje y a que, gradualmente, logres formar un estilo propio e independiente de organización de tus aprendizajes.

Aplica el modelo PER a las actividades que has realizado consideradas globalmente, especificando lo que aprendiste y lo que te falta por aprender, lo que entendiste ya y lo que aún no acabas de comprender. Usa las fichas.

Autoexamen sobre tu manera de pensar

La resolución de problemas nos debe llevar a entender el funcionamiento de nuestro propio razonamiento, a dominar nuestros estados de ánimo y a aumentar la confianza en nosotros mismos; en definitiva, nos ayuda a conocernos mejor a nosotros mismos. El conocerte a ti mismo, en ese ámbito, te proporcionará la posibilidad de utilizar tus recursos de la forma más eficaz posible y alcanzar con seguridad un conocimiento más pleno.

Para poder contestar las preguntas acerca de los problemas te sugerimos que primero leas la **ficha sobre resolución de problemas y juegos**, que es también parte de los materiales auxiliares para la organización del aprendizaje.

Lee con atención, reflexiona detenidamente y escribe con cuidado y orden las respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué papel de los siguientes te identificas más? Investigador, detective, profesor, conductor de coches, explorador, actor, juez, científico, negociante, matemático, constructor, el más listo de la clase. Explica brevemente tu elección.
2. Cuando te enfrentas a un problema, ¿con qué estado de ánimo te identificas más? Optimista, pesimista, desanimado, indiferente, vigilante, derrotado, crítico, disgustado, angustiado, aburrido, divertido, tranquilo. Explica brevemente por qué.
3. ¿Qué es lo que más te ayuda a concentrarte? El silencio, la paz, la tranquilidad, la música, viajar, pasear, contemplar el paisaje, etc. Explica por qué.
4. Si no te sale un problema, qué prefieres hacer: continuar a pesar de todo, olvidarte de él por un tiempo, abandonarlo definitivamente, seguir pensando en él en casa. Explica por qué.
5. A la vista de la tabla de bloqueos, ¿de qué tipo son los bloqueos que encuentras al resolver un problema? Explica por qué.
6. ¿Qué buscas en la resolución de problemas? Entretenimiento, ejercicio, cumplimiento de un deber, satisfacer mi curiosidad, autosuperación, preparación más eficaz, etc. Explica por qué.
7. ¿Cómo eres respecto al trabajo? Me cuesta ponerme en marcha, soy de esfuerzos prolongados, me canso y me aburro fácilmente, soy de intensos altibajos. Explica cuál puede ser la causa.

8. En el trabajo, ¿qué te produce más satisfacción: pensar por ti solo, observar, mirar como lo hacen los otros, explorar, repetir, repasar, asegurarse, no trabajar? ¿qué es lo que más trabajo te cuesta?
9. ¿Qué tipos de problemas son los que más te gustan?
10. Tu pensamiento, ¿anda casi siempre bajo control o a ratos anda vagando y divagando? ¿cuál crees que sea la causa?

Profesor, ¿estoy bien?

¿Cómo sabemos si un resultado o procedimiento es correcto? En este curso es una pregunta que una y otra vez nos hemos hecho. Si lo que tuviéramos que hacer fuese una suma, después de calcular el resultado, ¿necesitaríamos que alguien nos dijese si está bien para asegurarnos de haber procedido correctamente? Seguramente no, porque conocemos bien el procedimiento que se debe seguir y, si aun así nos asaltaran las dudas, bastaría revisar con cuidado la aplicación de nuestro algoritmo para detectar si hubo alguna equivocación. Para tareas más complejas, si no estamos seguros de lo que hemos hecho, debemos revisarlo cuidadosamente, buscando entender el significado tanto del procedimiento particular como de la idea general. Es decir, no basta con hacer cálculos, operaciones, dibujos, etcétera; debe haber una explicación que les dé sentido. En muchas ocasiones dejamos esas explicaciones sobreentendidas, pues suponemos que quien nos escucha o lee sabe perfectamente lo que estamos haciendo y por qué lo hacemos. Pero esta costumbre nos lleva a ser descuidados en la justificación de nuestros cálculos, procedimientos y resultados. Pecamos por omisión. Nos olvidamos de dos aspectos fundamentales: dar una explicación clara de lo que hicimos y por qué lo hicimos y poner atención e intentar entender lo que hicieron los demás. Estamos desatendiendo la comunicación, que es uno de los eslabones básicos de nuestro esquema de aprendizaje: Hacer, Reflexionar, Comunicar.

Estos dos aspectos son fundamentales para decidir cuándo un procedimiento y su resultado son correctos. Así, si lo que se nos dice está equivocado, estaremos en condiciones de detectarlo y señalarlo. No será un simple “está mal”, sino que irá acompañado de nuestras razones. Para que estas razones tengan peso deberán enfocarse hacia el asunto y no a la persona que lo dice. Si, por otro lado, es a nosotros a quienes se nos señala un error, también pediremos argumentos y si son razonables aprovecharemos el señalamiento para corregir nuestro trabajo.

Esta actitud, de cuidar los argumentos que damos y de escuchar con atención lo que dicen los otros, es la que permite una auténtica comunicación de nuestras ideas.

Las fichas

En los materiales auxiliares encontrarás un conjunto de fichas que, una vez enmicadas, podrás consultar cuando lo juzgues pertinente.

Las fichas que se incluyen son:

¿Qué es un problema?

¿Qué es un ejercicio?

Recomendaciones para el trabajo individual.

Recomendaciones para el trabajo en equipo.

Recomendaciones para la discusión general.

Algunas sugerencias para la elaboración del reporte de la actividad.

Presentación del documento: “La Heurística”

Entre los materiales auxiliares (MAPOA) hay una sección que se llama “La Heurística”, que incluye los documentos:

Una breve introducción que trata de la importancia de las heurísticas en la resolución de problemas y de la forma en que puedes usar con provecho los otros dos documentos.

La tabla “Heurísticas de uso frecuente”.

El diagrama de flujo “Síntesis esquemática de la estrategia de resolución de problemas”.

Lee atentamente los documentos y discute con tus compañeros sobre la mejor forma de usarlos para resolver mejor problemas cada vez más difíciles.

En estas páginas encontrarás una breve descripción de la estrategia de resolución de problemas que usaremos en este curso. Esta estrategia incluye la mayoría de las acciones sistemáticas de los buenos resolutores de problemas. Hasta donde sabemos, la mayoría de ellos usan las técnicas que aquí se indican y lo hacen en un orden parecido al que se da aquí.

La estrategia se presenta en forma de un diagrama de flujo en el que se señalan las principales etapas del proceso de resolución de problemas: **el análisis, el plan, la exploración, la instrumentación, y la verificación.**

La Heurística **A. H. Schoenfeld**

Dejen que le presente una palabra que usaremos con frecuencia. La palabra es *heurística*. Proviene del griego, y su traducción aproximada es “lo que sirve para conocer o comprender”. Una estrategia heurística es ***una técnica o indicación cuyo propósito es ayudarte a comprender mejor un problema y en el mejor de los casos resolverlo.*** Algunos ejemplos de estas estrategias son: “haz un diagrama”, “considera algunos problemas relacionados, pero más sencillos”, “toma de una instantánea”, “aplica la lupa”.

En la tabla “HEURÍSTICAS DE USO FRECUENTE” se presenta una lista de las heurísticas más importantes de resolución de problemas, y en otra hoja una “SINTÉISIS ESQUEMÁTICA DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS” en diagrama de flujo.

El diagrama comienza con un **análisis** de lo que el problema realmente te pide buscar. Esto significa hacerte una idea del problema: qué se da, qué se pide (los fines), por qué los datos están ahí y si los fines parecen razonables, los principios y procedimientos más importantes que parecen venir al caso o ser aplicables, en qué contexto matemático se da, etcétera. Por supuesto, lee cuidadosamente el problema. Cuáles heurísticas (si las hay) resultan adecuadas durante el análisis, puede depender tanto del problema como de la persona que lo está resolviendo. Pero algunos ejemplos del uso adecuado de ciertas estrategias heurísticas en esta etapa de la resolución de problemas se presentan a continuación:

1. Haz un diagrama, aunque el problema parezca ser tratable con un tipo de argumentación distinto (digamos uno algebraico). Los dibujos a menudo te ayudan a ver algunas cosas.
2. Ejemplifica el problema (estudia casos particulares), lo que puede resultar en que resuelvas el problema para algunos casos particulares o en que adviertas empíricamente ciertos patrones determinables. Si te piden que muestres algo “para todos los triángulos”, ¿se cumple para los isósceles, equiláteros o rectángulos?

3. Trata de hacer algunas primeras simplificaciones. En el problema “Encuentra el área máxima de cualquier triángulo que se pueda inscribir en una circunferencia de radio R ”, puedes (1) considerar primero la circunferencia unitaria, (2) advertir que, sin pérdida de generalidad, la base del triángulo se puede suponer horizontal, y (3) estudiar varios bosquejos para conjeturar una respuesta aceptable antes de pasar a la resolución analítica.

La **planeación** es, en cierto sentido, un “control experto”. No es realmente una caja aparte en el diagrama de flujo sino algo que impregna todo el proceso de resolución; su función es asegurarte que las actividades que estás realizando son las que más probablemente (hasta donde puedes decirlo en este punto) resulten provechosas. De manera más general, la planeación se ocupa de mantener una perspectiva global sobre lo que estás haciendo y de que estás procediendo jerárquicamente. Debes delinear una vía de resolución del problema en un nivel aproximado y cualitativo y después desarrollarlo en detalle conforme el proceso de resolución avanza. Por ejemplo, no deberás embarcarte en cálculos detallados u operaciones complejas hasta que:

- hayas considerado algunas alternativas,
- tengas una justificación clara para ellos y
- se hayan definido otras etapas de la resolución del problema a partir del punto donde los resultados del cálculo sean necesarios o claramente útiles.

(¡Cuán lamentable es gastar tiempo y energías en resolver una ecuación, sólo para descubrir que la solución no ayuda realmente en el resto del problema!)

La **exploración** es el corazón heurístico de la estrategia, puesto que es la fase exploratoria en la que la mayoría de las estrategias heurísticas de la resolución de problemas entran en juego. Como se puede ver en la tabla de “HEURÍSTICAS DE USO FRECUENTE” y en el diagrama de flujo de la “SÍNTESIS ESQUEMÁTICA DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”, la exploración se divide en tres etapas. En general, las indicaciones de la primera etapa son más fáciles de usar o más adecuadas para dar un acceso directo a una solución del problema original que las de la segunda etapa; la relación entre las etapas 2 y 3 es análogo. Cuando llegues a la exploración, todos los otros factores permanecen iguales, considera brevemente las indicaciones de la etapa 1 según su aceptabilidad, escoge la que te parezca más adecuada y trata de aprovecharla. Si las estrategias razonables de la etapa 1 resultan insuficientes, continúa con la etapa 2; si fuera necesario, cuando hayas agotado la etapa 2, ensaya las estrategias de la etapa 3. Si logras un avance sustancial en cualquier punto del proceso, puedes regresar a la **planeación** para diseñar el resto de la resolución o bien reingresar el **análisis**, con la creencia de que la comprensión lograda en la **exploración** puede ayudar a reformular el problema y, de esta manera, enfocararlo de otra forma.

La **instrumentación** no requiere comentario, *salvo que debe (generalmente) ser el último paso en la resolución real del problema.*

La **verificación** (comprobación), por otro lado, se debe subrayar. Los estudiantes raramente comprueban sus soluciones, y esto puede resultar muy costoso. En un nivel local, puedes detectar errores bobos. En un nivel global, al revisar el proceso de la resolución, puedes encontrar resoluciones alternativas, descubrir conexiones con otros temas y, a veces, llegar a advertir, conscientemente, los aspectos de la resolución del problema que puedas usar posteriormente y que te pueden ayudar a ser un mejor resolutor de problemas.

I. HEURÍSTICAS DE USO FRECUENTE

Análisis

1. Hacer un diagrama, si es posible.
2. Examinar casos particulares.
 - a. Escoger algunos valores especiales para ejemplificar y hacerse una idea o “sentir” el problema.
 - b. Examinar los casos límites, para explorar el espectro de posibilidades.
 - c. Asignar a los parámetros enteros los valores de la sucesión 1, 2, 3, ..., y buscar un patrón inductivo.
3. Tratar de simplificar el problema,
 - a. aprovechando las simetrías posibles, o
 - b. por medio de argumentos “sin pérdida de generalidad”, incluyendo los cambio de escala.

Exploración

1. Considerar problemas esencialmente equivalentes:
 - a. Reemplazar las condiciones por otras equivalentes.
 - b. Recombinar los elementos del problema de distintas maneras.
 - c. Introducir elementos auxiliares.
 - d. Reformular el problema por medio de
 - i. un cambio de perspectiva o de notación,
 - ii. la consideración de argumentos por contradicción o la contrarrecíproca,
 - iii. la suposición de que se tiene ya una solución y la determinación de sus propiedades.
2. Considerar problemas ligeramente modificados:
 - a. Establecer submetas (la satisfacción parcial de las condiciones),
 - b. Relajar una condición y después tratar de reimponerla
 - c. Descomponer el dominio del problema y resolver caso por caso.
3. Considera problemas ampliamente modificados:
 - a. Construir un problema análogo con menos variables.
 - b. Mantener constantes todas las variables excepto una para determinar los efectos de esa variable.
 - c. Tratar de aprovechar cualesquiera problemas relacionados que tengan
 - i. forma parecida,
 - ii. datos similares,
 - iii. conclusiones semejantes.

Recordatorio: al resolver los problemas más fáciles o relacionados, se debe aprovechar tanto el resultado como el método de resolución.

Verificación

1. ¿Pasa la solución obtenida las pruebas específicas siguientes?
 - a. ¿Usa todos los datos pertinentes?
 - b. ¿Está de acuerdo con las estimaciones y predicciones razonables?
 - c. ¿Resiste las pruebas de simetría, análisis dimensional y cambios de escala?
 2. ¿Pasa la solución las pruebas generales siguientes?
 - a. ¿Es posible obtenerla de manera distinta?
 - b. ¿Se puede verificar en los casos particulares?
 - c. ¿Se puede reducir a los resultados conocidos?
 - d. ¿Es posible usarla para generar algo que se sabe?
-

SÍNTESIS ESQUEMÁTICA DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Revisa los problemas que has resuelto, en forma individual o en equipo, y analiza cuál fue la estrategia que aplicaste para lograr resolverlo.

Describelas, dales un nombre y explica la forma en que la aplicaste en cada caso. Anota tanto las características comunes como las diferencias.

Recuerda las indicaciones relativas al enfoque profundo para este importante capítulo de tu portafolios.

No subestimes las dificultades que implica este aprendizaje tan complejo y ambicioso: Saber escoger y aplicar eficientemente la estrategia que resulta adecuada para resolver un problema.

Antes de entregar tu reporte, ¡revisalo!

Podría pensarse que es suficiente con cumplir las competencias básicas del bachillerato, es decir, dominar los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de tu vida escolar, laboral o cotidiana. Sin embargo, también es importante desarrollar otras habilidades como son:

- Expresarse correcta y eficientemente en español, tanto en forma oral como escrita, así como interpretar los mensajes en ambas formas.
- Manejar la información formulada en distintos lenguajes y discursos (gráficos, matemáticos, simbólicos, de cómputo, etc)

Al momento de elaborar tu reporte ya sea de forma individual o por equipo, se están poniendo en práctica las habilidades antes mencionadas. Sin embargo, para que la comunicación sea efectiva debes verificar que estés explicando con claridad la comprensión que lograste del problema, de la planeación y de tus resultados. Por lo que además de consultar la ficha de “Recomendaciones para la elaboración del reporte de la actividad” te sugerimos:

Antes de entregar tu reporte, ¡revisalo!

Instrucciones para los estudiantes.

Por favor, muestra en tu reporte todo tu trabajo. Tu reporte debe ser lo suficientemente explícito como para que lo evalúe alguien que no te conozca. Asegúrate de que quien lo lea tenga claro cómo resolviste el problema y cuál fue tu razonamiento. La evaluación del reporte tiene como guía los criterios siguientes:

Tu comprensión del problema y el tipo de matemáticas que usaste.

El uso correcto de las matemáticas.

El uso de las estrategias de resolución de problemas y el razonar correctamente.

La comunicación de tus ideas matemáticas y tus conclusiones.

Puedes usar tus herramientas tecnológicas y los materiales auxiliares que necesites para resolver los problemas.

Guía para la revisión del reporte de tu resolución del problema.

1. Comprensión conceptual del problema

Usé diagramas, dibujos y símbolos para explicar mi trabajo.
Usé toda la información importante para resolver correctamente el problema.
Pensé detenidamente sobre el problema y siento que sé de lo que hablo.

2. Conocimiento de los procedimientos

Realicé cálculos y usé términos y fórmulas matemáticos correctamente.
Resolví correctamente el problema y verifiqué mi solución.
Usé las ideas y el lenguaje matemáticos con precisión.
Verifiqué la corrección de mi respuesta.

3. Habilidades y estrategias de resolución de problemas

Busqué otras formas posibles de resolver el problema.
Usé estrategias de resolución de problemas que evidencian un buen razonamiento.
Mi trabajo es claro y organizado.

4. Comunicación

Me comuniqué clara y efectivamente con el lector de mi reporte.
En mi solución un paso conduce al siguiente, hay una ligazón.
Usé claramente la terminología y el vocabulario matemáticos.
Mis frases y afirmaciones tienen sentido, no faltan ni sobran palabras.

Mapas conceptuales

Conforme te adentres en el estudio de la geometría analítica descubrirás un tema que es muy interesante denominado *secciones cónicas*. Éstas han inquietado al ser humano desde la época de los griegos hasta nuestros días. Al paso del tiempo se han construido problemas y encontrado nuevas definiciones para un mismo concepto. Te invitamos a que conforme vaya avanzando tu curso y profundices en el estudio de las mismas, desarrolles un mapa conceptual con las secciones cónicas como base.

Cómo construir un mapa conceptual (y sus criterios de puntuación)

1. Identificar una pregunta referida al problema, el tema o el campo de conocimiento que se quiere representar mediante el mapa. Luego, basándose en esta pregunta, hay que identificar de 10 a 20 conceptos que sean pertinentes a la pregunta y hay que hacer una lista con ellos. A algunas personas les puede resultar útil escribir estas etiquetas conceptuales en tarjetas o en hojitas de post-it para manipularlas mejor. Si se trabaja con un programa de computadora especialmente diseñado para este fin hay que introducir la lista de conceptos. Las etiquetas conceptuales deben estar compuestas por tres palabras a lo sumo.
2. Hay que ordenar los conceptos colocando el más amplio o inclusivo al principio de la lista. A veces es difícil identificarlo. Suele resultar de utilidad el discutir y reflexionar sobre la pregunta original para decidir el orden de los conceptos. En ocasiones esto conduce a modificar la pregunta o a escribir otra distinta.
3. Revisar la lista y añadir más conceptos si son necesarios.

4. Comenzar a construir el mapa colocando el concepto más incluyente o general (pueden ser varios) en la parte superior. Suelen ser dos o tres los conceptos generales en la parte superior del mapa.
5. A continuación hay que escoger de uno a cuatro subconceptos y colocarlos debajo de cada concepto general. Si hay más de cuatro subconceptos que aparentemente van debajo de un concepto general, se puede identificar un concepto intermedio adecuado, con el que se puede crear un nivel jerárquico nuevo en el mapa.
6. Luego hay que unir los conceptos con líneas y denominar a estas líneas con palabras de unión adecuadas, que deben definir la relación entre ambos conceptos, de modo que se lea un enunciado o proposición válidos. Estos enlaces son los que crean el significado. Cuando se une de forma jerárquica un número amplio de ideas relacionadas, se advierte la estructura del significado de un tema determinado.
7. Ahora hay que modificar la estructura del mapa, añadir, quitar o cambiar conceptos supraordenados. Es posible que sea necesario realizar varias veces esta modificación; de hecho, es un proceso que se puede repetir de forma continua, conforme se adquieren conocimientos o ideas nuevos. Es ahí dónde son útiles los post-it o, mejor aún, los paquetes para crear mapas.
8. Buscar vínculos cruzados entre los conceptos de diversas partes del mapa y colocar palabras de enlace adecuadas. Los vínculos cruzados suelen contribuir al descubrimiento de nuevas relaciones creativas en el campo de conocimientos en cuestión.
9. Se pueden incluir en las etiquetas conceptuales ejemplos específicos de los conceptos.
10. Los mapas conceptuales se pueden realizar de formas muy distintas para un mismo grupo de conceptos. No hay una forma única de elaborarlos. A medida que se modifica la comprensión de las relaciones entre los conceptos, también se modifican los mapas.

Criterios de puntuación de los mapas conceptuales

1. **Proposiciones.** ¿Se indica la relación de significado entre dos conceptos mediante la línea que los une y mediante la(s) palabra(s) de enlace correspondiente(s)? ¿Es válida esta relación? Anota un punto por cada proposición válida y significativa que aparezca.
2. **Jerarquía.** ¿Presenta el mapa una estructura jerárquica? ¿Es cada uno de los conceptos subordinados más específico y menos general que el concepto que hay dibujado sobre él (en el contexto del material para el que se construye el mapa conceptual)? Anota cinco puntos por cada nivel jerárquico válido.
3. **Conexiones cruzadas.** ¿Muestra el mapa conexiones significativas entre los distintos segmentos de la jerarquía conceptual? ¿Es significativa y válida la relación que se muestra? Anota diez puntos por cada conexión cruzada válida y significativa y dos por cada conexión cruzada que sea válida pero que no ilustre alguna síntesis entre grupos relacionados de proposiciones o conceptos. Las conexiones cruzadas pueden indicar capacidad creativa y hay que prestar una atención especial para identificarlas y reconocerlas. Las conexiones cruzadas creativas o singulares pueden ser objeto de un reconocimiento especial o recibir una puntuación adicional.

4. **Ejemplos.** Los acontecimientos y objetos concretos que sean ejemplos válidos de lo que designa el término conceptual pueden añadir un punto, cada uno, al total (estos ejemplos no van dentro de una figura porque no son conceptos).
5. Además se puede construir y puntuar un mapa de referencia del material que se va a representar en los mapas conceptuales y dividir las puntuaciones de los estudiantes entre la puntuación del mapa de referencia para obtener un porcentaje que sirva de comparación. Por supuesto que algunos estudiantes pueden construir mapas mejores que el de referencia y su porcentaje será mayor que el 100%, de acuerdo con lo anterior.

El portafolios como escaparate

Coloca al frente de tu portafolios los cinco trabajos de los que te sientas más orgulloso y acompáñalos de una nota en la que expliques por qué te sientes orgulloso de ellos.

Muestra tu portafolios a un adulto y a una amiga de tu edad y pídele a cada uno que escriba un comentario. Incluye el comentario, con PER, en tu portafolios.

Problemas

Problemas

Introducción

La habilidad para resolver problemas constituye un excelente indicador del nivel de desarrollo matemático que has alcanzado. En este *Libro* la actividad de resolución de problemas es la parte más importante, ya que te permitirá vincular las herramientas matemáticas con una dimensión de uso, se introducen conceptos matemáticos utilizando contextos, y se formulan y responden preguntas que contribuyen a la conceptualización de los objetos matemáticos.

¿Qué es un problema?

Por problema se entiende una situación matemática o extramatemática que no tiene solución inmediata, admite varias vías de aproximación y posiblemente varias soluciones, puede consumir mucho tiempo, quizás varias clases, o hasta varios cursos y exige esfuerzo mental, imaginación y creatividad. Un problema no se trabaja una vez y ya nos olvidamos de él, tanto profesor como alumnos, sino que puede retomarse en distintos momentos para mejorar su solución o profundizar en alguna cuestión que haya suscitado.

A través de la actividad de resolución de problemas queremos que tú:

- hagas uso de las matemáticas con las que cuentas para dar respuesta a las preguntas planteadas en el contexto de la situación,
- busques conexiones entre diferentes representaciones,
- logres diferentes vías de acceso trabajando varios enfoques,
- generalices tus soluciones y reformules, ampliándolo, el problema en otros campos,
- generes criterios para validar las interpretaciones y los modelos matemáticos,
- construyas y hagas evolucionar los conceptos matemáticos como respuesta a tus propias preguntas, y
- desarrolles actitudes que te permitan enfrentar y manejar situaciones complejas con un alto grado de incertidumbre.

La resolución de problemas es un proceso que no se puede encerrar en una receta paso a paso, es en esencia un viaje, una aventura, no un destino, que a ratos sufrimos y a ratos disfrutamos, para el que no tenemos un mapa de antemano, necesitamos aprender a descubrir o construir caminos. Sin embargo, se pueden destacar algunas etapas de esta aventura: hay un deseo de acercarse al problema, de aceptar el desafío, de correr un riesgo, de encontrar la respuesta, de comprender una pregunta, de descubrir nuevos conocimientos o de crear una solución. Alguien ha dicho que en la resolución de un problema, como en la vida, lo que importa es el camino. Si tomas esto en cuenta, podrás aprender a adoptar una actitud que te permita disfrutar y aprovechar la resolución de un problema. No pongas la mira en el éxito o en el fracaso, sino en el proceso. Es el proceso el que te enseña. Un

problema resuelto es un problema muerto, mientras no está resuelto vive en ti como problema.

En esta guía se habla de *problemas*, *problemas con guía* y *proyectos*. Todos ellos comparten la misma idea de problema que acabamos de mencionar en los párrafos anteriores. Explicuemos la diferencia que hay entre ellos.

- I. Problema: Consta de un enunciado en el que se describe la situación y lo que se quiere que hagas y respondas. El tiempo estimado para discutirlo provechosamente es después de una o dos horas de haberlo trabajado.
- II. Problema con guía: Además del enunciado contiene un cuestionario o una secuencia de pasos que te permiten seguir avanzar en el problema usualmente de situaciones sencillas a otras más complejas. También el tiempo estimado para discutirlo provechosamente es después de una a dos horas de haberlo trabajado.
- III. Proyecto: Es un problema, o problema con guía, que requiere más de dos horas de trabajo antes de discutirlo provechosamente. Es posible que tengas que generar tú mismo los datos y una parte importante del trabajo la tengas que hacer fuera del salón de clases.

Lugar Geométrico

Un tipo de problema en geometría analítica es el llamado *lugar geométrico*. Consiste en una descripción de las condiciones que cumple cada punto de cierta curva y que debe ser suficiente para trazar su gráfica y obtener su ecuación. Si bien desde el curso de Geometría y Trigonometría se tienen problemas de este tipo (por ejemplo, *construcciones 8*), la geometría analítica permite tratar de manera más completa el problema al buscar llegar a la ecuación de la curva. Es una especie de acertijo que nos desafía a si nos atrevemos a trazar una figura que contenga las condiciones descritas en el enunciado y, mentalmente, ponerla en movimiento para observar el camino que se “hace al andar”.

Para este tipo de problemas un software de geometría dinámica es ideal, pues con él podemos “empujar” el punto recién construido y ver en el monitor de la computadora cómo se mueve.

Sobre los proyectos:

Los proyectos te permitirán, más que cualquier otra actividad, profundizar en el aprendizaje de la modelación matemática (puedes leer ‘Aspectos externos’ de Reuben y Hersh en la sección “Lecturas” del libro *Geometría y Trigonometría. Libro para el Estudiante*, para que tengas una perspectiva más amplia sobre el papel de la modelación matemática en los distintos ámbitos del quehacer humano).

Un proyecto es una tarea extraescolar de varias etapas que requiere un trabajo coordinado durante varias semanas, o meses, para llegar a darle una conclusión satisfactoria. Es decir que se logre dar respuesta a las preguntas que se plantearon y una evaluación, que puede incluir preguntas nuevas, de la calidad de la respuesta. En cada proyecto hay algunas partes en las que es muy probable que te atores. En ocasiones te podrás desatorar solo, gracias a que logres una mejor comprensión de alguna idea y así

puedas desatar el nudo y avanzar. Pero, más a menudo, requerirás de la asesoría de tus profesores, quienes te ayudarán por medio de preguntas, sugerencias, ejercicios complementarios o lecturas.

La evaluación del proyecto se hará mientras estás trabajando en él, no sólo al presentar el reporte final. Por lo tanto, debes hacer un plan desde el principio y fijar un calendario que especifique las fechas de entrega de los informes parciales y del informe final. Además, deberás considerar la presentación ante el grupo y preparar un guión para la discusión que se realizará durante, o después de, la presentación. Entre mejor entiendas lo que se trata de lograr con los proyectos, más fácil te será hacer el esfuerzo considerable que exigen. Con la evaluación, tanto la continua como la final, queremos obtener información sobre el desarrollo de tus habilidades matemáticas, como, por ejemplo, la capacidad para:

- Formular los problemas que resultan de una situación.
- Identificar los procedimientos matemáticos que te permiten obtener la información necesaria.
- Recopilar y organizar los datos obtenidos.
- Formular conjeturas razonables al considerar los patrones que observas en, o impones a, los datos.
- Poner a prueba tus hipótesis.
- Hacer los cambios necesarios y obtener otras informaciones a partir de las reformulaciones de los problemas.
- Explicar tus métodos de indagación.
- Producir un informe del desarrollo y conclusiones del proyecto sucinto y articulado.

También se considerarán algunas actitudes como:

- La creatividad y la iniciativa.
- La participación en el equipo.
- El liderazgo y la cooperación efectivos.
- La perseverancia y la minuciosidad.
- La flexibilidad y la amplitud de criterio.
- La disposición para ir más allá de las soluciones inmediatas.

Es muy recomendable que uses los paquetes que se incluyen en el disco compacto mientras resuelves los problemas. Si tienes dudas en su manejo tu profesor te puede orientar.

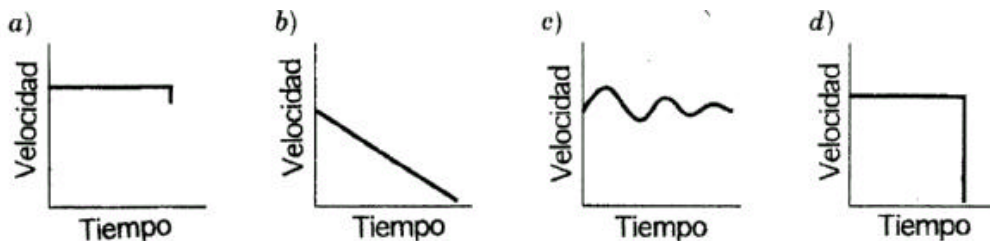
Problemas

1. Gráficas y Descripciones*

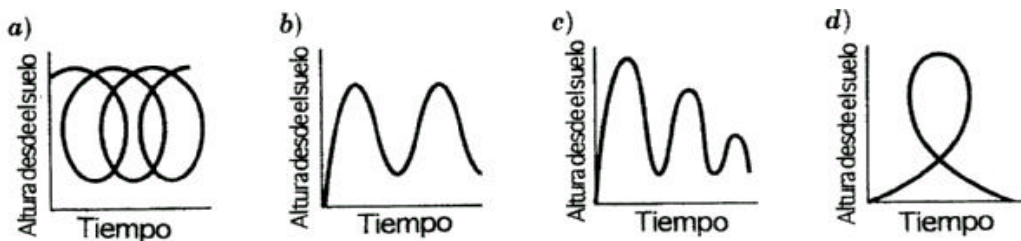
Identificación de gráficas cualitativas

Indica cuál es la gráfica que corresponde al enunciado. En caso de que no encuentres una gráfica apropiada, sugiere una.

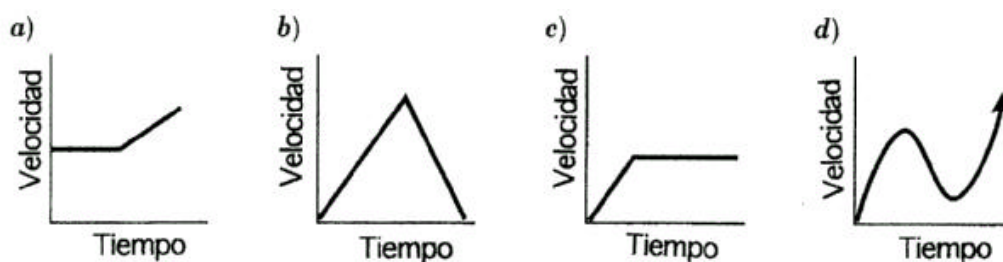
1. Un tren llega a una estación y deja sus pasajeros.



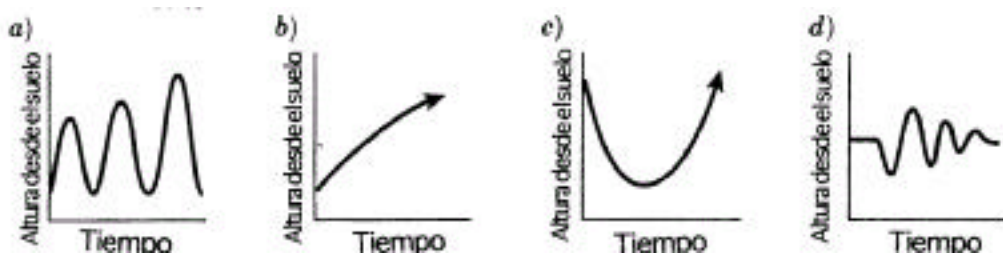
2. Un hombre hace un recorrido en la rueda de la fortuna.



3. Una mujer sube una colina a paso regular y baja corriendo.

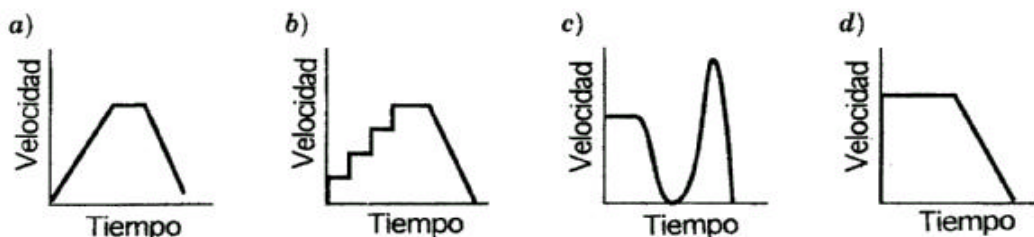


4. Un niño juega en un columpio.



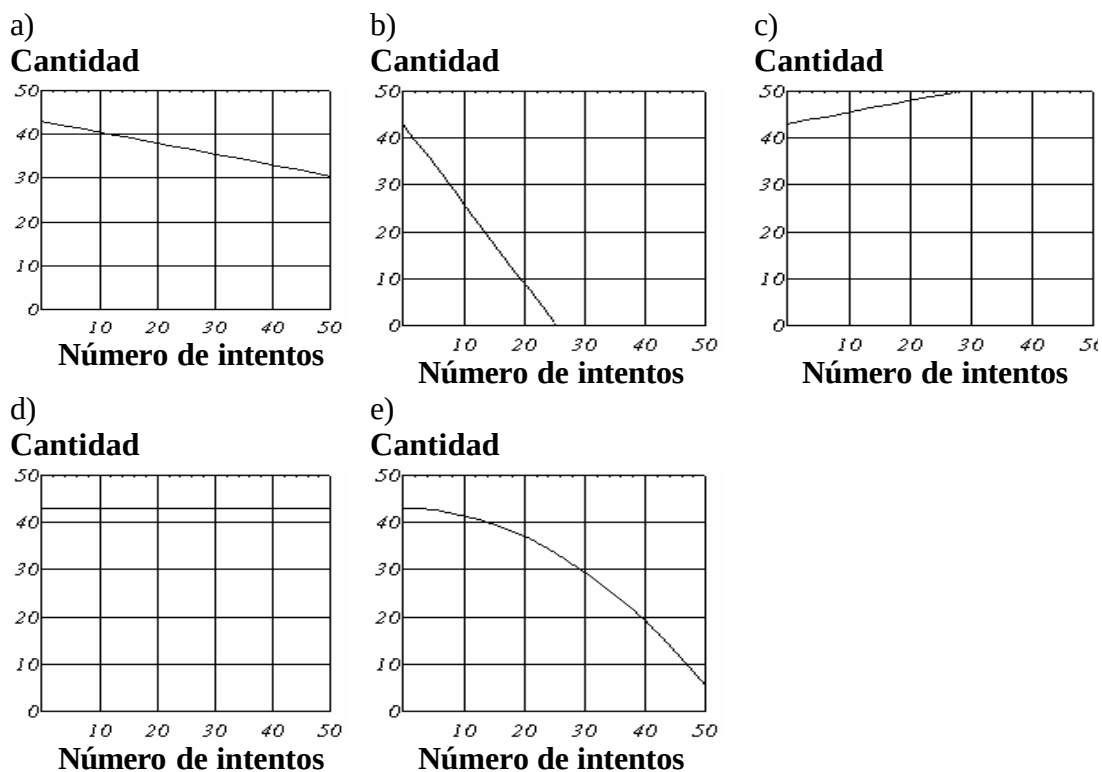
- Actividad adaptada a partir de: Frances Van Dyke: *En relación con las gráficas en la introducción al álgebra*

5. Un niño sube una resbaladilla y se desliza



Gráficas con escalas

1. Sandra comienza con \$43 a introducir cuartos (monedas de veinticinco centavos) en una máquina tragamonedas. ¿Qué gráfica representa la cantidad de dinero que le queda después de x intentos, suponiendo que nunca gana?

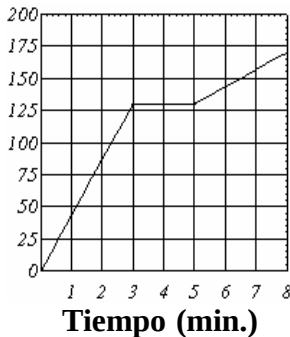


2. Ricardo mecanografía durante tres minutos a razón de treinta y cinco palabras por minuto. Hace una interrupción de dos o tres minutos y después mecanografía tres

minutos más a razón de veinte palabras por minutos. En las gráficas siguientes el tiempo aparece en el eje horizontal y el número de palabras mecanografiadas aparecen en el eje vertical. ¿Qué gráfica representa el tiempo que Ricardo pasó en la máquina de escribir?

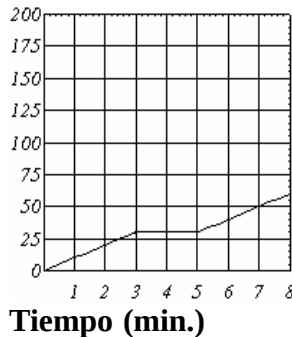
a)

Palabras



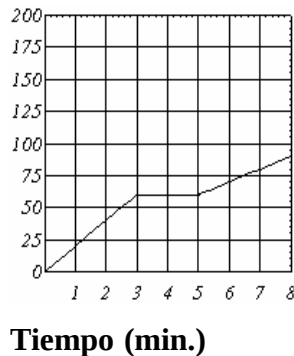
b)

Palabras



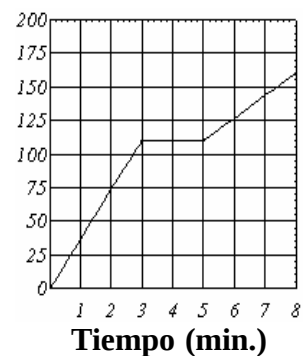
c)

Palabras



d)

Palabras



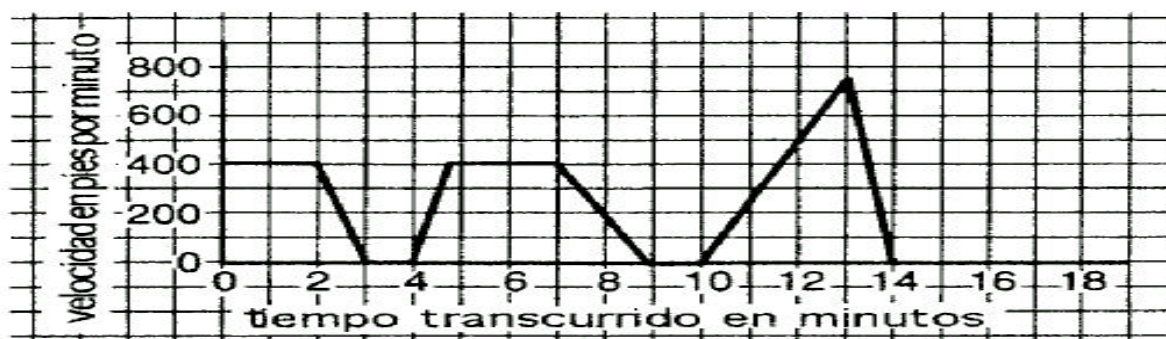
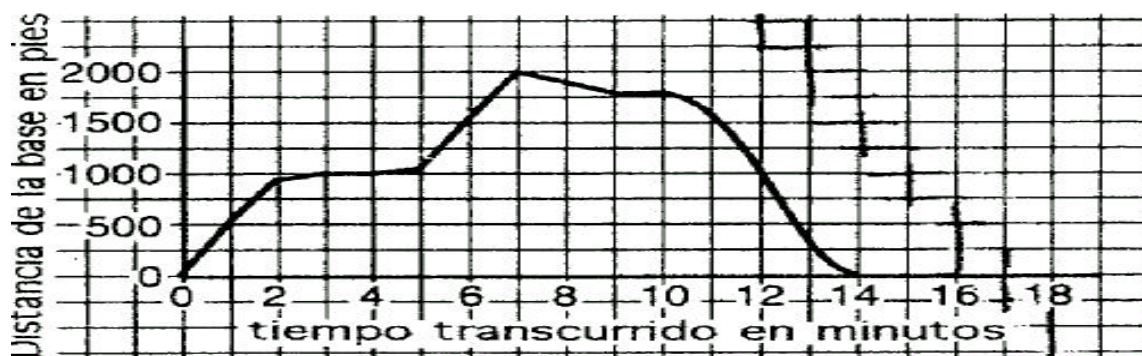
3. Escoge una de las respuestas que no fue correcta en el problema 1 y formula un problema que tenga esa gráfica como respuesta.
4. Inventa un problema de este tipo y traza la gráfica correspondiente.

Trazado de gráficas

1. Sara camina de su casa a la tienda. A medio camino, advierte que olvidó el dinero, así que da media vuelta, regresa a su casa, coge el dinero y, ahora sí, va hasta la tienda. Grafica el tiempo en el eje horizontal y la distancia con respecto a su casa con el eje vertical.
2. Rashid salta desde un trampolín. Grafica el tiempo en el eje horizontal y su distancia con respecto al suelo en el eje vertical.
3. Kendra corre con exceso de velocidad por la carretera cuando la detiene un oficial de policía. El oficial le da una boleta y después Kendra continúa su camino. Grafica el tiempo en el eje horizontal y la velocidad de Kendra en el eje vertical.
4. Carlos vive en una gran ciudad y va a la escuela en un autobús que se detiene cada cuadra para permitir que suban o bajen los pasajeros.
 - a) Grafica el tiempo en el eje horizontal y la velocidad del autobús en el eje vertical.
 - b) Grafica el tiempo en el eje horizontal y la distancia que Carlos ha viajado en el eje vertical.

La interpretación de gráficas

El área de esquí de Mount Southington afirma que su ascensor viaja a 400 pies por minuto y hace un recorrido de 2000 pies. Las gráficas siguientes registran de dos maneras la subida de un esquiador a la cima de la montaña en el ascensor y su descenso esquinado. Una gráfica representa la distancia desde la base de la montaña en función del tiempo



1. ¿Se detiene la silla del ascensor antes de que el esquiador llegue a la cima de la montaña? Explica tu respuesta.
2. ¿Es posible saber a partir de la gráfica de la distancia si la velocidad ha descendido a cero? Explica tu respuesta.
3. ¿Cuál es la velocidad más alta de la silla del ascensor en millas por hora?
4. ¿Cuál es la velocidad más alta del esquiador en millas por hora?
5. Advierte que entre los minutos 9 y 10 la velocidad es cero. ¿Qué piensas que ocurrió?
6. Nombra cinco puntos A, B, C, D, E, en cada gráfica, vinculando la distancia y la velocidad. Explica por qué estos puntos se relacionan y que está ocurriendo en cada instante.

2. Un paseo por automóvil

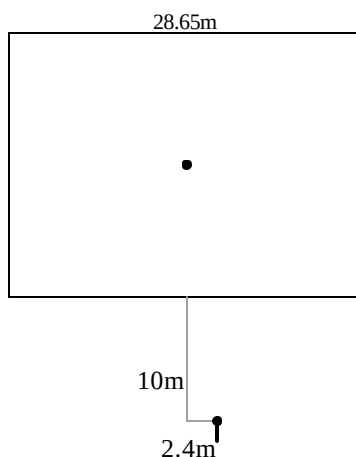
Un automóvil recorre una distancia de 50km hacia el este, después 30km hacia el norte y finalmente 25km en una dirección de 30° hacia el este del norte. ¿Cuál es la distancia desde el punto de partida al punto terminal?

3. La mosca I

Un cuarto tiene las dimensiones de $3\text{m} \times 4\text{m} \times 3\text{m}$. Una mosca vuela desde un rincón hasta el rincón diametralmente opuesto. (a) ¿Cuál es la distancia entre dichos puntos? (b) ¿Puede ser la longitud de su trayectoria menor que esta distancia? ¿Mayor que esta distancia? ¿Igual a esta distancia? (c) Si la mosca no volase sino que caminase, ¿cuál sería la longitud de la trayectoria más corta que pudiese seguir?

4. Un juego de básquetbol televisado

Una cámara de televisión se coloca a 10m de la línea lateral de una cancha de básquetbol de 28.65m de largo. La cámara se encuentra a 2.4m del centro. ¿Qué ángulo debe abarcar para captar toda la acción de la cancha?



5. Epifanía

Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió, disgustada, que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, y la obligó a recuperar los 4 minutos tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó, en total, 9 minutos.

Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.

Todos hemos escuchado, o hecho, descripciones de objetos en movimiento, que incluyen expresiones como "detenido", "rápido", "lento", "más rápido", "disminuyó su velocidad", "más alejado", "aceleró más" y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria. Identifica en la gráfica algunas partes con estas expresiones y describe las características de la gráfica que les corresponden.

Ahora convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario. Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea positiva, negativa o nula, y describe las características de la gráfica. Al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.

6. Lugares geométricos 1

Un lugar geométrico.

Traza un segmento PQ de 5 cm de longitud.

Traza varias circunferencias que pasen por P y por Q y marca con tinta los centros de estas circunferencias.

Formula conjeturas en la forma «si-entonces» y trata de probarlas.

Escoge un sistema de coordenados adecuado y encuentra su ecuación.

Otro lugar geométrico.

Traza un segmento PQ de 5 cm de longitud.

Usa tu escuadra 30-60-90 para trazar muchos triángulos PQR que tengan un ángulo opuesto al segmento PQ de 30° y marca el vértice R de cada uno de estos triángulos.

Usa tu escuadra 45-45-90 para trazar muchos triángulos PQS que tengan un ángulo opuesto al segmento PQ de 45° y marca el vértice S de cada uno de estos triángulos.

Usa tu escuadra 30-60-90 para trazar muchos triángulos PQT que tengan un ángulo opuesto al segmento PQ de 60° y marca el vértice T de cada uno de estos triángulos.

Usa tu escuadra 30-60-90 para trazar muchos triángulos PQU que tengan un ángulo opuesto al segmento PQ de 90° y marca el vértice U de cada uno de estos triángulos.

Formula conjeturas en la forma «si-entonces» y trata de probarlas.

Escoge un sistema de coordenados adecuado y encuentra su ecuación.

Incluye el reporte, con PER, en tu portafolios.

7. Apagar el fuego a como de lugar

Una ciudad cuenta con dos estaciones de bomberos, las cuales están separadas por 15 Km. Desde ambas estaciones, se pueden enviar carros de bomberos en cualquier dirección de la ciudad. Debido a las condiciones en las que se encuentran las unidades de rescate, el carro de bomberos que parte de la estación A, tarda 1 minuto por kilómetro en dirigirse al lugar del siniestro, mientras que el carro de bomberos que parte de B, tarda 2 minutos por kilómetro (supón que las condiciones del tráfico son similares en toda la ciudad).

Considera la estación A como el origen de coordenadas cartesianas.

¿Cuál es el límite que divide en regiones al campo de trabajo de los bomberos, para que el tiempo tomado por carro, de determinada estación, sea el menor tiempo posible para el encuentro con el siniestro?

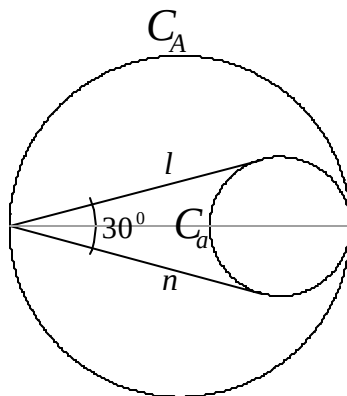
8. El ave viajera

Cierta ave que parte de su nido en búsqueda de alimento a las 6 a.m. y regresa a él a las 6 p.m., requiere de un mínimo de 4 horas para descansar y alimentarse. Si el ave tiene una velocidad media de vuelo de 20 km/h, ¿cuáles son los límites del territorio que puede cubrir el ave?

9. Razón de áreas de dos círculos

Las líneas l y n son tangentes al círculo C_a y forman un ángulo de 30° . Si la bisectriz de este ángulo pasa por un diámetro del círculo C_A , y los círculos, C_a y C_A , son tangentes (ver figura), demuestra que la razón de el área del círculo mayor, A , al círculo menor, a , es:

$$\frac{A}{a} = \frac{\left[\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} + 1 \right]^2}{4}$$



10. El pozo y el río

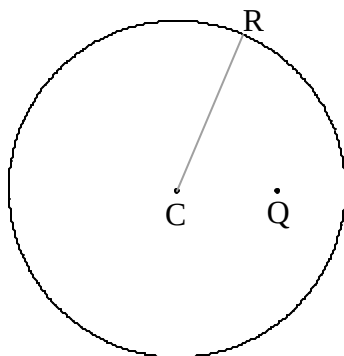
En un campo abierto pasa un río recto y hay un pozo a una distancia r del río. Hallar el conjunto de puntos, P , que tengan la siguiente propiedad: si se va en dirección de P hacia el río, su distancia del río es la misma que del pozo.

11. La aldea

A través de la aldea A , rodeada por todas partes de prados, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a velocidad de 5 km/h, mientras que por el prado, a 2 km/h. Trazar el conjunto de puntos hasta los cuales podría llegar desde A en una hora.

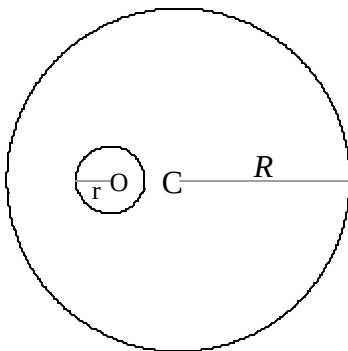
12. Circunferencia tangente a otra y que pasa por un punto interior a esta última

Dada una circunferencia y un punto interior Q distinto del centro C . Considera ahora todas las circunferencias tangentes a la primera que pasan por Q . ¿Qué lugar geométrico describen sus centros?



13. Circunferencia tangente a otras dos

Sean dos circunferencias, una de radio R y la otra de radio r , tales que la primera contiene a la segunda, como se ve en la figura. Demuestra que el lugar geométrico de todos los centros de circunferencias tangentes a las dos primeras es una elipse cuyo eje mayor es la suma de los radios R y r .



14. Ensordecedor disparo de un rifle e impacto de la bala

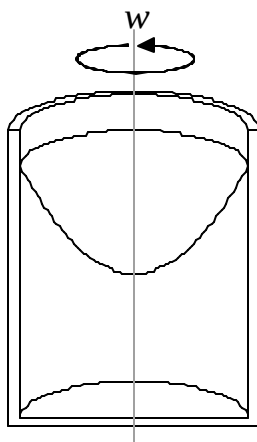
Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Encuentra el lugar geométrico de P .

15. El estruendo de un cañón

Un cañón P se escucha no simultáneamente en dos puestos de observación A y B . Si en el punto A se escucha 1 segundo después que en el punto B (velocidad del sonido = 330m/seg). Describe exactamente la condición bifocal de la cónica que cumple todas las posiciones el cañón P .

16. Masa líquida rotante

En física se demuestra que cuando una masa líquida gira con velocidad angular ω constante en torno a un eje vertical central de un recipiente cilíndrico, la superficie superior líquida tiene la forma de un paraboloide (ver figura); más precisamente, la sección transversal vertical de esta superficie es la curva $y = \omega^2 x^2 / 2g$. Supóngase que se desea construir un espejo parabólico de mercurio. ¿Cuán rápido deberá girar (en revoluciones por minuto) la masa líquida de mercurio para que en el paraboloide se genere una distancia focal de 1m? (Considera que la aceleración de la gravedad es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

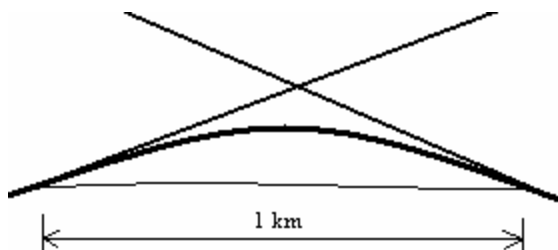


17. Bóveda de murmullo

Un recinto tiene forma elíptica, con paredes verticales de 2 metros de altura y techo elipsoidal. Tiene 12 metros de longitud y 6 metros de ancho. ¿Dónde se deben parar dos personas, que no sea una junto a la otra, para que se puedan secretar sin que nadie más los oiga?

18. Construcción de un puente

Un ingeniero desea construir un puente sobre un río de 1km de ancho para unir dos carreteras. A un lado la carretera tiene una pendiente ascendente del 7% y al otro lado una pendiente descendente de 5%. El ingeniero desea que el puente describa un arco de parábola y se una suavemente con los extremos de la carretera. Convéncele que no es posible construir un puente de esa forma y ofrécele una solución distinta que cumpla con el resto de sus especificaciones.



19. El barco bien librado de un puente

Se construirá un puente a través de un río de 46 metros de ancho. El arco del puente será semielíptico y debe construirse de manera que pueda pasar sin peligro por debajo de él un barco de menos de 16 metros de ancho y 9 metros de altura. ¿Cuál deberá ser la altura del puente, a la mitad del mismo?

20. La mosca II

Una mosca sigue una trayectoria cuya curva es una rama de hipérbola. Se acerca asintóticamente por una recta cuya pendiente es $\sqrt{5/6}$ y se desvía por el calor de la flama de una vela, y se aleja nuevamente. Si en un tramo de su trayectoria la hipérbola tiene un ancho de 20 cm y 10 cm de profundidad, encuentra el valor de su excentricidad.

21. La fuente

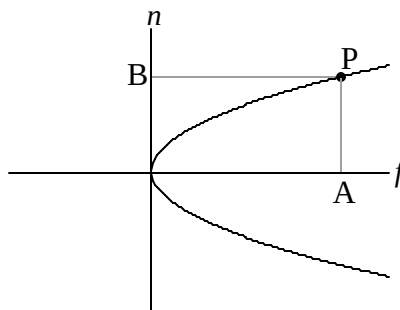
Dos grabadoras están separadas por 100 metros de distancia. Un sonido que proviene de una fuente se registra 0.2 segundos antes en una de las grabadoras que en la otra. ¿Dónde se encuentra la fuente de sonido?

22. Ecuación intrínseca de la parábola

Llámense eje focal, f , de la parábola a la línea recta que pasa por el vértice y por el foco, y eje normal, n , a la línea perpendicular a este eje y que pasa por el vértice.

Por medio de la ecuación ordinaria de la parábola, con vértice en el origen, deduce la siguiente propiedad geométrica: El cuadrado de la distancia desde un punto cualquiera, P , de la curva al eje focal, es igual al producto de la longitud de su lado recto por su distancia al eje normal.

$$[PA]^2 = 4p[PB]$$



23. Ecuación intrínseca de la elipse

La ecuación ordinaria de la elipse cumple con una propiedad geométrica intrínseca, de la cual se obtiene una ecuación válida para cualquier posición, incluso rotada.

Toma la ecuación ordinaria, con centro en el origen, de la elipse cuyos semiejes mayor y menor son a y b , respectivamente. Entonces si A y B son los pies de altura desde un punto cualquiera P de la elipse a los ejes mayor y menor respectivamente, deduce que

$$\frac{[PB]^2}{a^2} + \frac{[PA]^2}{b^2} = 1$$

24. Ecuación intrínseca de la hipérbola

La ecuación ordinaria de la hipérbola cumple con una propiedad geométrica intrínseca, de la cual se obtiene una ecuación válida para cualquier posición, incluso rotada.

Toma la ecuación ordinaria, con centro en el origen, de la hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son a y b , respectivamente. Entonces si A y B son los pies de altura desde un punto cualquiera P de la elipse a los ejes transverso y conjugado respectivamente, deduce que

$$\frac{[PB]^2}{a^2} - \frac{[PA]^2}{b^2} = 1$$

25. Una Parábola Rotada

Halla la ecuación de la parábola cuyo eje tiene por ecuación $x + y + 1 = 0$, su vértice es el punto $(-2, 1)$, y que pasa por el punto $(-2, 4)$.

26. Una elipse rotada

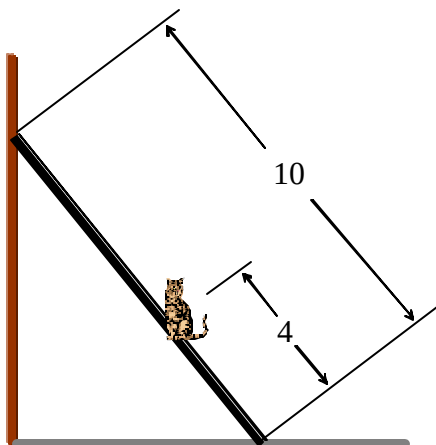
Encuentra la ecuación de la elipse cuyos ejes, mayor y menor, pasan por las rectas $x + y + 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$, y sus longitudes son 3 y 1 respectivamente.

27. Una hipérbola rotada

Halla la ecuación de la hipérbola cuyos ejes, transverso y conjugado, pasan por las rectas $x + y + 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$, y sus longitudes de los semiejes son 1 y 2 respectivamente.

28. Un gato intrépido

Una escalera de 10 peldaños se encuentra recargada sobre un muro liso y resbala por el peso de un gato. Encuentra el lugar geométrico que describe el gato, si éste no se mueve del cuarto peldaño desde el extremo que resbala sobre el piso.



29. Lugares geométricos 2

Un lugar geométrico.

El lado AB de un triángulo ABC mide 5 cm. El ángulo C, opuesto a este lado, mide 30° .

Traza el lugar geométrico (locus) de los puntos correspondientes al vértice C.

Escoge un sistema de coordenados adecuado y encuentra su ecuación.

Otro lugar geométrico.

Dado un rombo de 5 cm de lado, con un lado fijo, traza el lugar geométrico de los centros del rombo.

Escoge un sistema de coordenados adecuado y encuentra su ecuación.

Incluye el reporte, con PER, en tu portafolios.

30. ¿Jonrón?

Un jugador batea una pelota a 1 m del piso con una velocidad de 48 m/s, con un ángulo de elevación de 22° con respecto a la horizontal. Un viento de 80 km/h sopla en dirección horizontal en la misma dirección del batazo pero en sentido contrario. La barda del jardín tiene 6 m de altura y está a 120 m del bateador.

¿Cuánto dura la pelota en el aire y qué tan lejos llega?

¿Cuándo alcanza la pelota su altura máxima y cuál es esta altura máxima?

¿Da el bateador un cuadrangular (home run)? Explica.

31. Lugares geométricos 3

Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que:

La suma de sus distancias a los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$ es de 10 unidades.

La diferencia de sus distancias a los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$ es de 2 unidades.

La suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$ es de 50 unidades.

Una recta contiene los puntos $A(-5,5)$ y $B(-1,1)$. Expresa analíticamente el hecho de que un punto cualquiera $P(x,y)$ está sobre la recta y deduce las ecuaciones paramétricas de dicha recta.

El área del triángulo cuyos vértices son $P(x,y)$, $A(5,4)$ y $B(1,3)$ es 5 unidades cuadradas. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P .

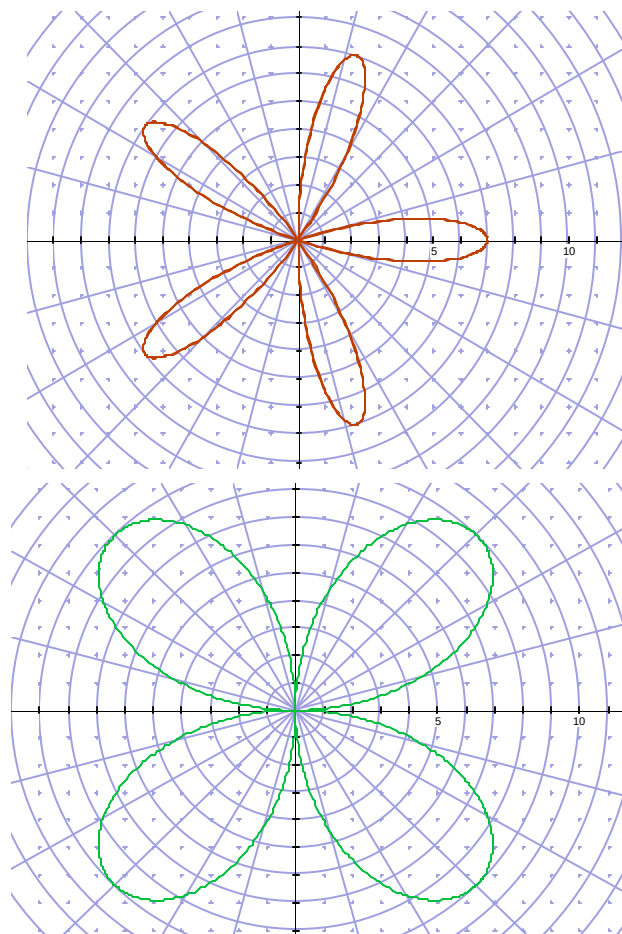
Dos de los vértices de un triángulo son $A(4,-1)$ y $B(-3,-5)$. Determina las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico del tercer vértice C que se mueve en el plano de tal modo que la pendiente del lado AC es siempre el triple de la del lado BC .

32. Cinco puntos

Encuentra la ecuación de la cónica que contiene los puntos $(0,-2)$, $(0,4)$, $(-3,0)$, $(5,0)$ y $(4,2)$ e identifícala. Simplifica su ecuación y calcula sus elementos utilizando rotaciones y traslaciones.

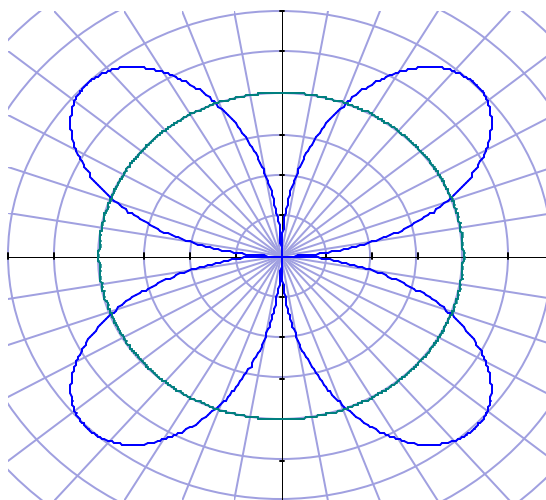
33. Pétalos

Escribe las ecuaciones de las curvas siguientes y calcula las coordenadas de los extremos de cada pétalo.

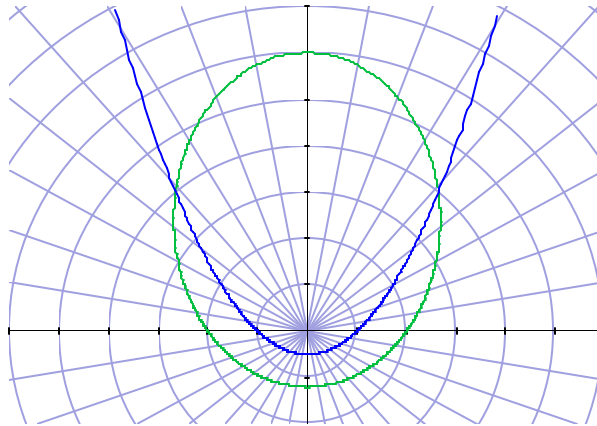


34. Intersecciones

Las ecuaciones de las curvas son $r = 4$ y $r = 6 \operatorname{sen}(2\theta)$. Calcula sus intersecciones. Escribe sus ecuaciones paramétricas.



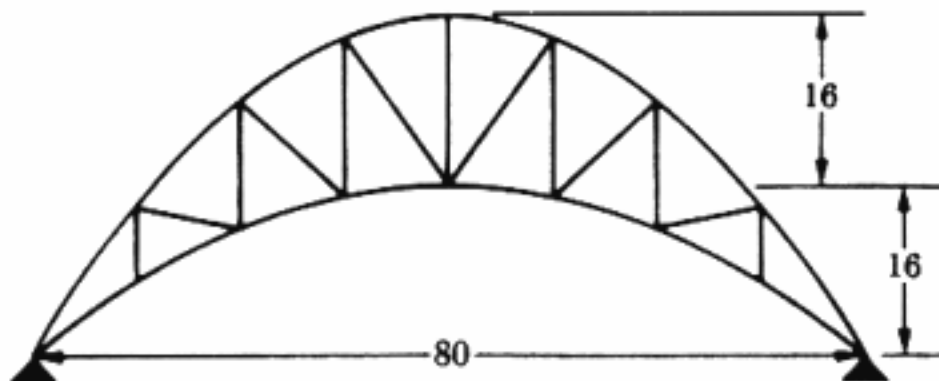
Las ecuaciones de las curvas representadas son $r = \frac{6}{3 - 2 \operatorname{sen}(\theta)}$ y $r = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}(q)}$.
Encuentra sus ecuaciones en coordenadas rectangulares y calcula sus intersecciones.



35. Cometa

Un cometa procedente del espacio profundo se acerca al Sol siguiendo una órbita parabólica. Cuando está a 100 millones de kilómetros del Sol, la línea que une al Sol y al cometa, forma un ángulo de 60° con el eje de la parábola. ¿A qué distancia del Sol se acercará el cometa?

36. Los tirantes



Calcula la suma de las longitudes de los tirantes del armazón arqueado de la figura.

37. El joven ecologista

Vitrubio, el joven ecologista, debe atravesar un lago circular, que tiene un kilómetro de radio, para llegar a un punto diametralmente opuesto. Puede cruzarlo de varias formas: remando a 2 km/h o bordeándolo a pie a 4 km/h o una parte remando y otra parte caminando. De qué manera tendrá que cruzar el lago si su propósito es

- a) ver el máximo de paisaje.
- b) hacerlo de la forma más rápida.

38. El hogareño Caronte

Caronte, en su barca, se encuentra a 2 km de distancia de un tramo recto de la costa. A lo largo de la costa, a 5 km del punto más próximo a Caronte, se encuentra su casa. Caronte puede remar a 3.6 km/h y caminar a 6 km/h.

¿Cuál es el tiempo mínimo en que puede llegar a su casa?

II. Problemas con guía

1. Dame tus coordenadas

Establece un sistema de referencia (ejes, origen y unidad).

- a) Describe tu posición con respecto a este sistema de referencia.
- b) Describe la posición de cinco de tus compañeros con respecto a este sistema de referencia.
- c) Establece los valores mínimos y máximos para describir la posición de cualquiera de tus compañeros.
- d) Da algunas coordenadas e identifica al ocupante del punto.
- e) ¿Cuáles son los aspectos convencionales del sistema que escogiste?

Representa un plano cartesiano y en él:

- f) Identifica las rectas paralelas a cada eje que pasen por el punto
 - i) (2,3)
 - ii) (-1,2)
 - iii) (0,0)
- g) Describe los semiplanos que tienen por frontera las rectas anteriores.
- h) Describe la región del plano cuyos puntos (x,y) cumplen la desigualdad:
 - i) $-1 < x < 2$
 - ii) $4 < y < 7$
 - iii) $x < 1$
- i) Expresa las desigualdades anteriores en términos de valores absolutos.
- j) Describe la región del plano que satisface las dos desigualdades $-3 < x < 0$, $-2 < y < 7$

Representa un plano polar y en él:

- k) Localiza los puntos del inciso f.
 - i) Calcula las coordenadas polares de estos puntos.
 - ii) Identifica los círculos que pasan por cada uno de los puntos anteriores y su centro es el polo u origen del sistema.
 - iii) Describe las regiones que tienen por frontera estos círculos.
- l) Describe la región del plano cuyos puntos (r, θ) satisfacen la desigualdad:
 - i) $1 < r < 3$
 - ii) $30^\circ < \theta < 60^\circ$
 - iii) $r < 4$
- m) Describe la región del plano que satisface las dos cadenas de desigualdades $2 < r < 5$, $30^\circ < \theta < 120^\circ$

2. Las razones de un segmento

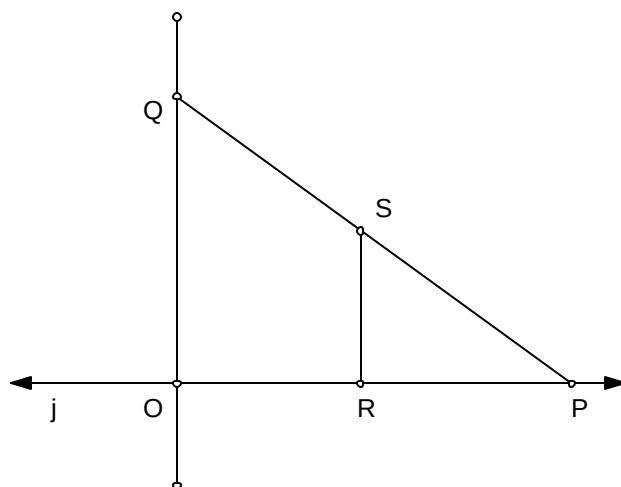
Considera un segmento del que se dan sus extremos.

- a) Divídelo en dos, tres, etc. partes y localiza las coordenadas de los puntos de división, nómbralos y calcula las razones de todas las combinaciones posibles. Organiza tus resultados en una tabla.
- b) Analiza los resultados que obtuviste en el inciso a. Describe el significado de las razones:
 - i) positivas, cero y negativas.
 - ii) entre cero y uno.
 - iii) mayores que uno.
 - iv) entre uno negativo y cero.
 - v) menores que uno negativo.
- c) Formula algunas variantes del problema, cambiando los datos y el tipo de datos; por ejemplo, da un extremo del segmento y una razón para localizar el otro extremo del segmento.
- d) Plantea y resuelve tres problemas en donde apliques los procedimientos que encontraste.
- e) Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

3. Sin segundas intenciones

Desde la calle se quiere apoyar una escalera en una pared vertical de un edificio muy alto. Entre el edificio y la calle hay una barda de 2.5 metros de altura paralela al edificio. La distancia entre la barda y el edificio es de 3 metros. ¿Cuánto debe medir, por lo menos, la escalera?

En tu disco se incluye la construcción del modelo geométrico en un archivo de *El Geómetra*, el punto P representa el pie de la escalera. Puedes moverlo a lo largo de la recta OR, que representa la calle.



Si quieres construir el modelo geométrico sigue las instrucciones del recuadro:

Construye la recta horizontal j .

Identifica un punto O sobre la recta j .

Construye una perpendicular a j por O .

Destaca O y con el menú Transformar, traslada O en dirección 0° , magnitud 3 cm. Llámalo R . Señala R y con el menú Transformar, traslada R en dirección 90° , magnitud 2.5 cm. Llámalo S .

Identifica un punto P sobre la recta j , distinto a O y R .

Construye un rayo con origen en P que pase por S . Construye la intersección del rayo PS con la recta perpendicular a j que levantaste por O . Llama a esta intersección Q . Oculta el rayo OS y construye el segmento PQ .

Cuestionario

- ¿Cómo están representados los elementos de la situación que se describe en el enunciado? ¿Qué escala se usó en el modelo geométrico?
- Mide todos los elementos que consideres pertinentes para establecer una relación útil entre lo que sabes y lo que necesitas averiguar. Con las mediciones que hiciste responde la pregunta que se formula en el enunciado.
- ¿A qué distancia del pie de la barda queda el pie de la escalera cuando la longitud de ésta es mínima? ¿Qué ángulo forma la escalera con respecto a la calle?

- d) Traza en P una recta que sea perpendicular a OR. Con centro en P construye un círculo de radio PQ. Construye la intersección de la perpendicular y el círculo, llámala T. Mide PT. ¿Qué representa esta medida en la situación que se plantea en el enunciado?
- e) Señala el punto T y en el menú Presentar escoge la opción Trazar Punto para que deje un rastro cuando se mueva. Ahora mueve el punto P sobre la recta OR. ¿Qué representa la curva que describe T? ¿Cómo se relaciona esta curva con la pregunta que se plantea en el enunciado?
- f) Sea $m\angle QPO = \alpha$. Sean $RP=x$, $QP=y$, $OQ=z$. ¿Qué representan en la situación que se describe en el enunciado?

En el ΔQPO , ¿cuánto mide el coseno del ángulo QPO , es decir, el $\cos \alpha$? La longitud de la escalera, y , parece depender de dos variables, x y α . Pero si consideramos el ΔSPR , advertimos que ambas se pueden relacionar mediante una razón trigonométrica. Con esta nueva relación entre x y α podemos, con un poco de álgebra, lograr que y dependa de una sola variable.

Escribe la relación que encuentraste.

Usa un graficador, por ejemplo Winplot, y localiza el punto que representa la respuesta a la pregunta que se plantea en el enunciado.

- g) Formula algunas preguntas que saquen provecho del juego de relaciones que obtuviste y verifica tus respuestas usando el modelo geométrico. Las preguntas pueden ser del tipo:

Una ventana en el tercer piso del edificio se encuentra a 10 metros de altura con respecto a la acera, ¿qué longitud debe tener una escalera para alcanzarla desde la calle?, ¿a qué distancia se colocará el pie de la escalera del pie de la barda?, ¿qué ángulo formará la escalera con respecto a la calle?

- h) Ahora modifica los datos que se proporcionaron en el enunciado y establece un juego de relaciones entre todas las variables que intervienen en la situación que se describe en el enunciado. Discute el papel que desempeñan los datos y las incógnitas en el problema que resolviste. Haz un diagrama que describa cómo usaste los datos y las relaciones matemáticas para avanzar de lo que sabes hacia lo que ignoras y quieres averiguar.

Inventa dos problemas que reflejen lo que aprendiste acerca de la situación que se planteó en el enunciado. Describe detalladamente el propósito de cada problema y su relación con el modelo geométrico que utilices.

- i) Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

4. El granjero

La casa de un granjero está a 150 metros de un camino recto. Su buzón está sujeto al granero, a 100 metros de la casa y a 90 metros del camino. Cada lunes deja la basura a la orilla del camino y después pasa a recoger el correo. ¿Qué punto del camino hace que su recorrido sea el más corto?

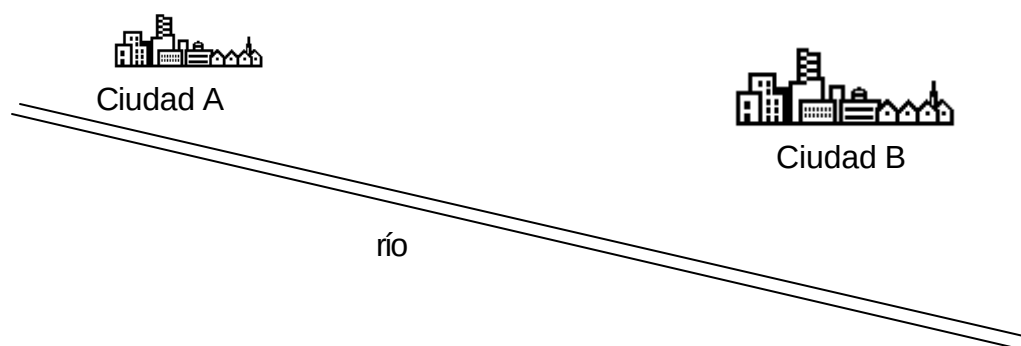
- a) Representa el camino con una línea recta horizontal.
- b) Describe la posición de la casa como un lugar geométrico con respecto al camino.

- c) Describe la posición del granero como un lugar geométrico con respecto al camino.
- d) Describe la posición del granero como un lugar geométrico con respecto a la casa.
- e) ¿Cuáles son las posiciones posibles del granero si debe satisfacer ambas condiciones?
- f) Construye un modelo geométrico de la situación del granero con algún paquete de geometría dinámica y úsalo para responder la pregunta que se plantea.

5. Una historia de dos ciudades

Dos ciudades necesitan un servicio adicional de agua. Se decidió construir una planta purificadora de agua junto a un río cercano y canalizar el agua desde la planta purificadora hasta las ciudades. Cada ciudad pagará la instalación de las tuberías que la unirán a la planta purificadora. Hay dos posibilidades:

- i) La planta purificadora se ubica a la misma distancia de las dos ciudades.
- ii) La planta purificadora se ubica de tal manera que el gasto sea mínimo y las ciudades comparten por partes iguales los gastos.



¿Dónde debe colocarse la planta purificadora en cada caso?

- a) Construye un modelo geométrico con un paquete de geometría dinámica.
- b) Describe la solución como la conjunción de lugares geométricos.

6. Mejor muerto que siervo

Perseguía un caballo vengativo a un ciervo que le hizo leve ofensa; mas hallaba segura la defensa en su veloz carrera el fugitivo. El vengador, perdida su esperanza de alcanzarlo, y lograr así su intento, al hombre le pidió su valimiento para tomar del ofensor venganza.	Consiente el hombre, y el caballo airado sale con su jinete a la campaña; corre con dirección, sigue con maña, y queda al fin del ofensor vengado. Muéstrase al bienhechor agradecido quiere marcharse libre de su peso: mas desde entonces mismo quedó preso, y eternamente al hombre sometido. <i>Félix M^a de Samaniego. Fábulas</i>
--	--

En estos cuatro cuartetos se describe la persecución de un caballo a un ciervo. Consideremos que la situación ocurrió de la siguiente manera:

El caballo vengativo persigue al ciervo. En el momento de iniciar la persecución, los dos animales estaban separados por una distancia de 62 m. Tanto la velocidad del ciervo como la del caballo eran constantes e iguales a 15 m/s. Después de 6 segundos de galope, el caballo desesperanzado pide ayuda al hombre, pierde un segundo en hacerlo, pero al ser conducido por él su velocidad se incrementa a 20 m/s. Continúa persiguiendo al ciervo que conserva su misma velocidad.

¿A qué distancia se encontraba el caballo del ciervo tres segundos después de haberse iniciado la persecución? ¿Y a los seis segundos? ¿Y a los ocho?

Durante los primeros 6 segundos, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona la distancia, d , a la que se encuentra el caballo del ciervo con el tiempo, t , que tiene de haberse iniciado la persecución? Entre los seis y siete segundos de persecución, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la distancia a la que se encuentra el caballo del ciervo en función del tiempo? Después de los siete segundos de persecución, ¿cuál es la expresión algebraica de la distancia a la que se encuentra el caballo del ciervo?

Sugerencia 1: Haz una tabla con los datos que obtengas de "congelar el movimiento" a distintos segundos y describir las posiciones de los infelices animales. Para obtener los datos de la tabla hiciste varias operaciones, escríbelas nuevamente, dejándolas indicadas, sin efectuarlas, observa su forma y trata de usar esta estructura para responder las preguntas anteriores.

¿En que momento alcanza el caballo al ciervo? ¿Qué valores puede tomar t para las que expresiones algebraicas tengan sentido?

Sugerencia 2: Escoge un sistema de coordenadas adecuado y representa gráficamente los recorridos de ambas bestias.

¿Era motivada la desesperanza del caballo? De no haber pedido ayuda al hombre, ¿hubiera alcanzado al ciervo? Justifica tu respuesta.

Inventa un problema inspirado en el problema anterior en el que modifiques las condiciones iniciales, particularmente las relativas a las velocidades.

Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

7. ¡Queremos rock!

Los alumnos del último semestre están organizando un baile de bienvenida a los alumnos de nuevo ingreso. Decidieron contratar a dos grupos de rock y las condiciones de pago que imponen los grupos son:

- El primer grupo cobra 3 000 pesos más el 40% de lo recaudado por las entradas

- mientras que el segundo grupo cobra 6 450 pesos más el 10% de lo recaudado por las entradas.

Pero no hay acuerdo entre los organizadores: se establece una ardua discusión entre ellos porque algunos piensan que el segundo grupo cobrará más que el primero, otros (partidarios del primer grupo) le piden que argumenten irrefutablemente su posición (es decir, usando matemáticas).

Los partidarios del primer grupo piensan que lo que deben hacer es manipular el precio de las entradas de tal forma que el primer grupo gane más que el segundo. ¿Cuánto es lo menos que tienen que cobrar por persona para que eso se cumpla si estiman que habrá 500 personas que paguen su entrada?

Por otro lado, independientemente de quién gane más que quién, también se enfrentan a otra cuestión: deben poder pagarle a los dos grupos con el dinero que se recaude de las entradas ¿Cuánto es lo menos que deben cobrar por persona para que con las entradas alcancen a pagarle a los dos grupos? ¿Cuál es el grupo que cobraría más, finalmente?

8. Tienda de videos

La ganancia semanal, P de una tienda que renta videos puede aproximarse mediante la fórmula $P = 1.5n - 200$ en donde n es el número de videos rentados a la semana.

- Traza una grafica de la ganancia en términos de las rentas de cintas desde 0 hasta 1000 cintas, inclusive.
- Estima la ganancia semanal si se rentan 500 cintas.
- Estima el número de cintas rentadas si la ganancia semanal es de \$ 1000.00.

9. Club de Tennis

El costo, C , por jugar tenis en el *Club de Tennis Hacienda* incluye una membresía anual de \$2000 más \$100 por hora, h , de tiempo de uso de cancha.

- Escribe una ecuación para el costo anual por jugar tenis en el *Club de Tennis Hacienda* en términos de las horas jugadas.
- Grafica la ecuación desde 0 hasta 300 horas, inclusive.
- Estima el costo por jugar 200 horas en un año.
- Si el costo anual por jugar tenis fue de \$ 1200, estima cuántas horas de tenis fueron jugadas.

10. Esperanza de vida

Una tabla estándar empleada en seguros de vida indica la expectativa de vida E para un hombre de edad A . Esto significa que a una edad A una persona puede esperar vivir E años más. Una tabla particular da $E = 20$ cuando $A = 54$ y $E = 14$ cuando $A = 63$. A partir de estos datos determina una ecuación lineal que exprese E en función de A .

Calcula:

- La edad a que un hombre puede esperar vivir 28 años más.
- E para un niño recién nacido.
- La edad a la que E es igual a cero

11. Movimiento lineal I

En el instante $t = 0$ un cuerpo se aleja del punto A en línea recta a una velocidad constante $V_1 = 40$ m/s. Dos segundos después, un segundo cuerpo se aleja del punto A siguiendo la misma trayectoria del primer cuerpo pero con una velocidad constante de $V_2 = 80$ m/s.

- Encuentra el sistema de ecuaciones lineales que expresa estas condiciones.
- Construye la gráfica del sistema obtenido en (a) y calcula, a partir de la gráfica, el tiempo y la distancia en el instante en que el segundo cuerpo alcanza al primer cuerpo.

12. Movimiento lineal II

En el instante $t = 0$ una partícula que se mueve en línea recta a una velocidad constante V_1 pasa por el punto $(-2, 0)$ y un segundo después observamos que pasa por el punto $(0, 1)$. En el instante en que la primera partícula pasa por $(0, 1)$ se nota que una segunda partícula pasa por $(1, -2)$, moviéndose sobre una recta que forma un ángulo de 45° con el eje X positivo.

Esta partícula se está dirigiendo hacia el primer cuadrante.

- Calcula la velocidad V_1 de la primera partícula.
- Encuentra la ecuación lineal de la trayectoria que describe la primera partícula.
- Halla la ecuación lineal de la trayectoria que describe la segunda partícula.
- ¿En qué punto del primer cuadrante se cortan las trayectorias?
- Si las partículas chocan, calcula la velocidad V_2 de la segunda partícula.

13. El librero

Un vendedor de libros usados tiene en su tienda 90 libros de la *Colección Austral* y 80 de la *Alianza de Bolsillo*. Decide hacer dos tipos de lotes: el lote de tipo A con 3 libros de *Austral* y 1 de *Alianza*, que venderá a 160 pesos, y el de tipo B con 1 libro de *Austral* y 2 de *Alianza*, que venderá a 200 pesos.

¿Cuántos lotes de cada tipo debe hacer para maximizar su ganancia cuando los haya vendido todos?

14. ¿Misión posible?

Algunas personas piensan que las mujeres atletas están empezando a “alcanzar” a los hombres en las competencias de pista en los Juegos Olímpicos. De hecho, investigadores de la UCLA publicaron en 1992 datos que parecían indicar que dentro de 65 años los mejores corredores hombres y mujeres podrían competir en igualdad de condiciones. Otros investigadores no coinciden con esto. A continuación están los datos de la carrera de 200 metros con los tiempos ganadores en los Juegos Olímpicos de diferentes años.

Año	tiempo en segundos para hombres	tiempo en segundos para mujeres
1948	21.1	24.4
1952	20.7	23.7
1956	20.6	23.4

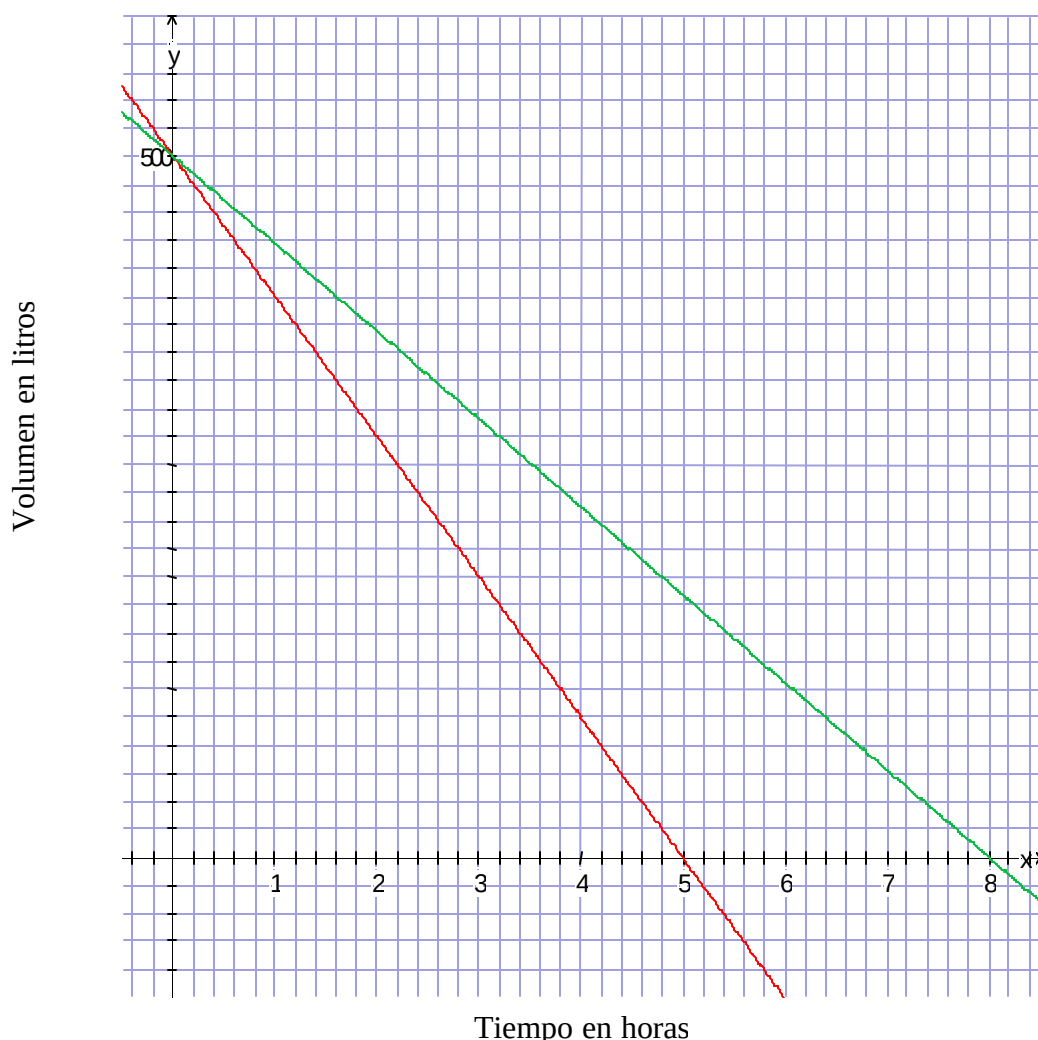
1960	20.5	24.0
1964	20.3	23.0
1968	19.83	22.5
1972	20.00	22.40
1976	20.23	22.37
1980	20.19	22.03
1984	19.80	21.81
1988	19.75	21.34
1992	19.73	21.72

(Advierte que la introducción de mejores dispositivos de cronometraje significa medidas más precisas, a partir de 1968 para los hombres y de 1972 para las mujeres.)

- Comienza tu investigación acerca de la conjetura de la UCLA haciendo una gráfica de estos datos. Para obtener el orden de precisión que necesitas debes utilizar papel milimétrico. Trabajarás sólo en el primer cuadrante. En tu eje X coloca el año de las Olimpiadas desde 1948 hasta 2048, de cuatro en cuatro. En tu eje Y pon los números desde 15 hasta 25, que representa el tiempo en segundos; si utilizas papel milimétrico toma cuatro cuadros para cada segundo. Utiliza cruces (X) para representar los tiempos de los hombres y circulitos (O) para los de las mujeres. Esto formará lo que llamamos una *gráfica de dispersión*. No es una línea o curva bien definida.
- Con una regla traza una recta que represente aproximadamente la pendiente y dirección indicadas por las marcas de los hombres. Haz lo mismo con las marcas de las mujeres. Escribe una o dos frases explicando por qué piensas que tu recta es una buena representación de la gráfica de dispersión.
- Ahora encuentra la ecuación de cada recta utilizando tu gráfica para estimar la pendiente y la intersección-y (ordenada al origen) de cada una. Trata de ser lo más preciso posible, recordando sus unidades y usando los puntos en donde la recta cruza intersecciones de la cuadrícula. La pendiente estará en segundos por cada año.
- ¿Parece que las dos rectas se cruzan? ¿En qué años se cruzan? Si resuelves las dos ecuaciones algebraicamente, ¿obienes la misma respuesta?
- Usa una hoja de cálculo para encontrar una regresión lineal de cada conjunto de datos (mujeres, hombres). Algunas calculadoras científicas también te permiten hacer este problema en el modo de estadística, marcando los puntos individuales que teclees y encontrando una regresión lineal que represente los datos. De cualquier manera que lo hayas hecho, comprueba si las ecuaciones de la hoja de cálculo o de la calculadora coinciden con las tuyas.
- Toma una decisión con tu equipo acerca de si piensas que los tiempos de las mujeres alcanzarán a los de los hombres. Escribe dos o tres frases explicando por qué sí o por qué no crees que lo harán.
- Investiga las marcas en otra competencia, que también se realice para hombres y mujeres, analiza los datos y escribe tus conclusiones.
- Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

15. Los tinos

Dos tinacos del mismo volumen se vacían uniformemente, mediante llaves de diferente tamaño, de tal manera que uno de ellos queda vacío en 5 horas en tanto que el otro requiere de 8 horas.



- ¿Cuál es la gráfica y la ecuación que corresponde a cada tinaco? Explica con palabras lo que representa cada una de ellas.
- ¿Cuál es la pendiente de cada una? Explica el significado de la pendiente en términos de la situación.
- ¿En qué instante tiene uno de los tinacos el doble del agua que el otro?
- ¿A qué hora se deben comenzar a vaciar simultáneamente ambos tinacos para que a las 7:00 PM uno de ellos tenga el doble de agua que el otro?
- Considera ahora el agua que ha salido del tinaco en lugar de la que queda. Traza las gráficas, haz una comparación con las anteriores y explica cómo pueden ambos pares de gráficas representar la misma situación.
- ¿A qué hora se deben comenzar a vaciar simultáneamente ambos tinacos para que a las 7:00 PM uno de ellos tenga el triple de agua que el otro?

- f) ¿A qué hora se deben comenzar a vaciar simultáneamente ambos tinacos para que a las 7:00 PM en uno de ellos haya n veces agua que en el otro? ¿Puede n tomar cualquier valor?
- g) Inventa, redacta y resuelve un problema que se pueda representar con el mismo modelo matemático.
- h) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) con respecto al aprendizaje que lograste en esta actividad.

16. Jardinería

María compró un nuevo aspersor que cubre parte del total de un área circular. Considerando como origen el centro del aspersor, éste lanza agua lo suficientemente lejos para alcanzar un punto ubicado en (12, 16), cuya unidad de longitud está dada en metros.

- a) Encuentra una ecuación que represente los puntos más lejanos a los que el aspersor puede llegar.
- b) El jardín de María mide 40 metros de ancho y 50 de largo. Si María riega sus jardín sin mover el aspersor, ¿qué porcentaje del jardín no se mojará directamente?

17. Ver para saber

¿Cuáles son los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

tiene 0, 1, 2, 3, 4, ó 5 soluciones?

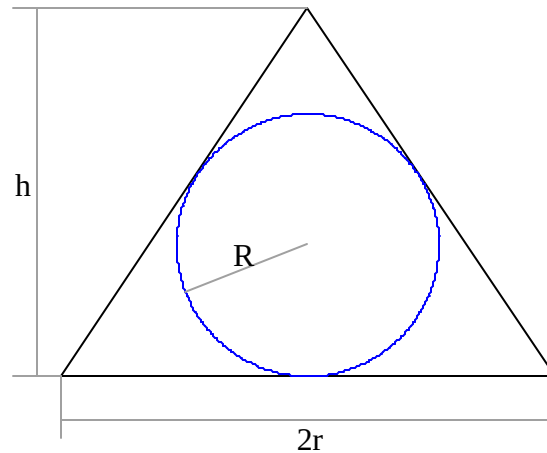
- a) Traza las gráficas de las ecuaciones cuando a es 1, 3, 5 y 7.
- b) Interpreta la pregunta en términos de las gráficas de las ecuaciones.
- c) Resuelve el problema e interpreta la solución en términos gráficos.
- d) Inventa un problema similar pero que tenga a otras curvas como protagonistas.
- e) Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

18. Esfera inscrita en un cono circular recto

Se quiere envolver una esfera de radio R con una superficie cónica de revolución, incluyendo la base del cono. Supón que la altura del cono es la variable h y el radio de la base es la variable r .

- a) Considera las secciones transversales del cono y la esfera como en la figura. Establece un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que el origen esté en el centro de la base, el eje X contenga el diámetro de la base y el eje Y esté sobre el eje del cono.
- b) Determina las coordenadas del centro de la esfera.
- c) Halla las ecuaciones de los lados inclinados del cono (observa que tales rectas, cualquiera de ellas, genera al cono cuando gira en torno del eje Y . A dicha recta se le llama generatriz)

- d) Ahora supón que el radio, r , de la base, es dado. ¿Cuál es la altura, h , del cono? (*sugerencia*: La distancia del centro de la esfera a uno de los lados (generatriz) del cono es R , ¿por qué)
- e) Si la altura del cono, h , es dada, ¿cuál debe ser el radio, r , de la base del cono?



19. Sismología

Cada una de las tres estaciones en la red sismográfica detecta un terremoto en su región. Las lecturas del sismógrafo indican que el epicentro del terremoto se ubica a 50 kilómetros de la primera estación, 40 de la segunda y a 13 de la tercera. Sobre un mapa en el que cada cuadrícula representa un kilómetro cuadrado, la primera estación se ubica en el origen, la segunda, en $(0, 30)$ y la tercera $(35, 18)$.

- Escribe un sistema de ecuaciones de segundo grado que represente esta situación, e indica el tipo de cónica de cada una.
- Traza la gráfica del sistema y utilízala para aproximar la ubicación del epicentro.
- Resuelve algebraicamente el sistema de ecuaciones para determinar la ubicación del epicentro.

20. Campo petrolero

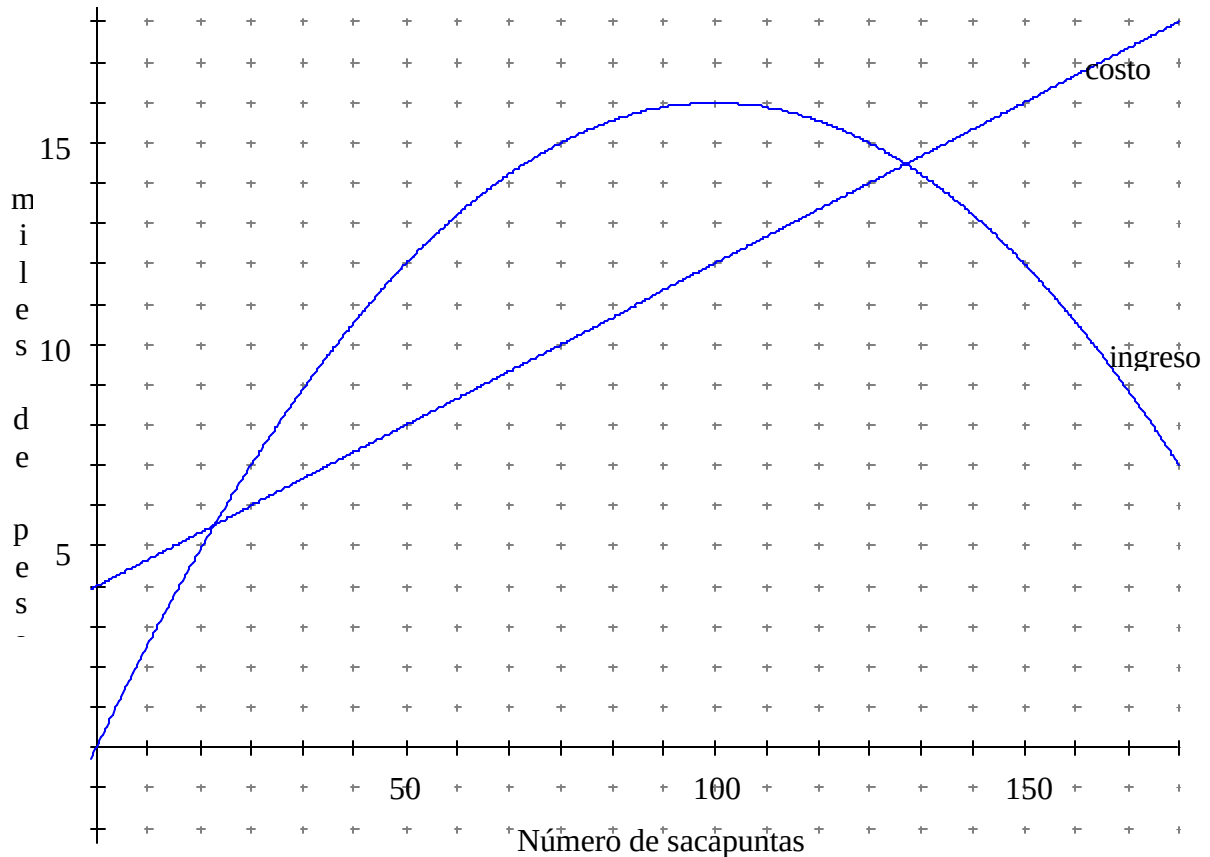
Un campo petrolero tiene 20 pozos y cada uno de ellos produce 200 barriles diarios. La producción diaria de petróleo se reduce 5 barriles diarios por cada nuevo pozo que se perfora.

- ¿Cuál es la producción diaria de petróleo de este campo, cuando el número de pozos es 20, 24, 28, 32, 36, 40?
- ¿Aumenta o disminuye la producción diaria de petróleo del campo petrolero por cada nuevo pozo que es perforado?
- Si n denota el número de nuevos pozos, halla una ecuación que represente la producción diaria de cada pozo en función de n .

- d) Si x denota el número de pozos del campo petrolero, halla una ecuación que represente la producción diaria de este campo petrolero en función de x .
- e) ¿Cuántos nuevos pozos deberán perforarse para alcanzar la máxima producción de este campo petrolero?
- f) Si se continúa explotando este campo petrolero perforando más pozos, ¿cuántos pozos agotan la producción del campo?

21. Sácale punta

Una compañía que fabrica sacapuntas electrónicos decide mostrar el comportamiento de sus costos e ingresos en función del número de sacapuntas que produce en la gráfica siguiente:



- a) ¿Cuáles son los costos fijos por la fabricación de sacapuntas?
- b) Encuentra la ecuación de costos por la producción de sacapuntas.
- c) Encuentra la ecuación de ingresos debidos a la venta de sacapuntas.
- d) ¿Cuántos sacapuntas deben venderse para no perder ni ganar?
- e) ¿Qué ganancia se obtiene al vender 170 sacapuntas?
- f) Encuentra la ecuación de la ganancia debido a la venta del sacapuntas. Grifícala.
- g) ¿Cuántos sacapuntas se deben vender para obtener la ganancia máxima?
- h) Encuentra la ecuación de la ganancia que se obtiene por cada peso invertido y grifícala.

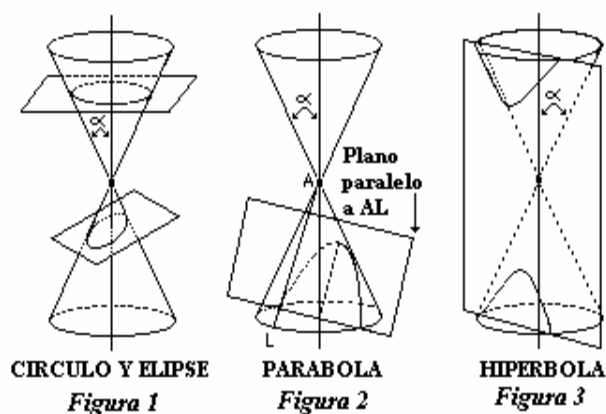
22. Venta de calzado

Una compañía de calzado tenis, acumuló en enero \$27000.00 por la venta de cierto calzado. Después de reducir el precio en \$150.00, la fábrica produjo y vendió 30 pares de calzado más y obtuvo \$33750.00 de la venta del mismo calzado el mes siguiente.

- Escribe un sistema de ecuaciones de segundo grado para representar esta situación. Identifica el tipo de cónica que representa cada ecuación.
- Encuentra el precio del calzado tenis durante cada mes.
- Verifica gráficamente la solución que obtuviste.

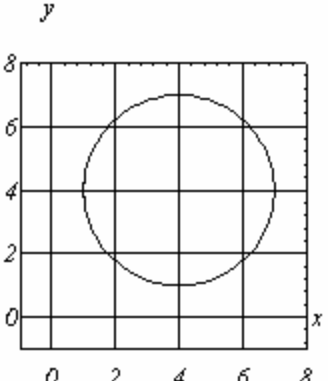
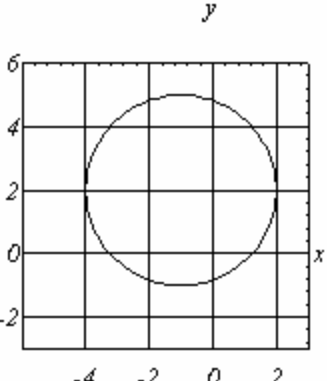
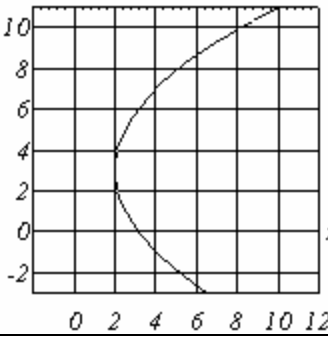
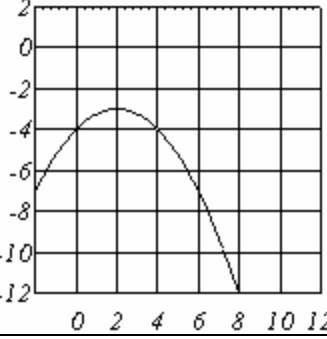
23. Lo Recto de las Cónicas

Los griegos definieron las curvas cónicas como las diferentes intersecciones que pueden obtenerse a partir de un cono y un plano. Particularmente esta construcción se debe al matemático griego Apolonio de Perga (~300 a de C). Otra de sus aficiones era la astronomía, pero es un misterio si imaginó alguna vez que sus construcciones geométricas también servirían dos mil años después (con Newton) para describir el movimiento de los planetas, problema cuyo estudio también le atrajo.



CURVAS CÓNICAS OBTENIDAS COMO SECCIONES DE UN CONO

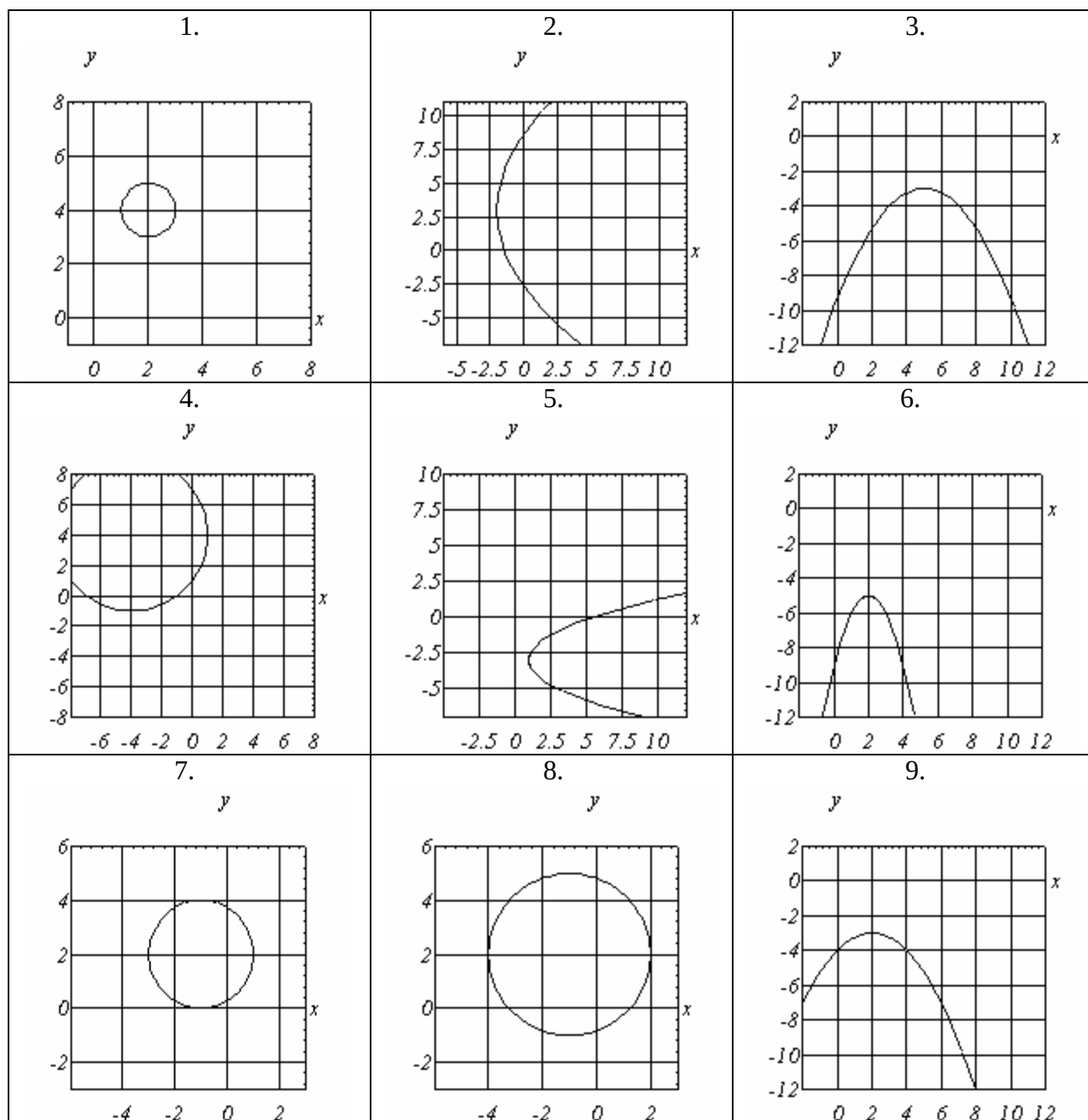
- Las ecuaciones de las gráficas siguientes se describen debajo de cada una. Para encontrar las ecuaciones de las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) se utilizan los elementos geométricos de la gráfica, de tal forma que se establece una relación entre la ecuación y la gráfica.
 - ¿Cuáles son los elementos geométricos que caracterizan a la circunferencia?, ¿cuáles a la parábola?
 - Observa las ecuaciones y las gráficas de las curvas que se te proporcionan: ¿en qué parte de la ecuación están los elementos geométricos de la gráfica?

	
$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 9$ $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
	
$(y-3)^2 = 4(2)(x-2)$ $y^2 - 6y + 9 = 8x - 16$ $x^2 - 8x - 8y + 25 = 0$	$(x-2)^2 = 4(-1)(y+3)$ $x^2 - 4x + 4 = -4y - 12$ $x^2 - 4x + 4y + 16 = 0$

b) Encuentra las ecuaciones generales de las siguientes curvas (tanto de las circunferencias como de las parábolas).

Una vez que hayas obtenido las ecuaciones, haz una tabla con dos columnas, en una de ellas coloca las ecuaciones de las parábolas y en la otra las de las circunferencias y contesta:

- ¿Qué diferencia encuentras entre las ecuaciones de las parábolas y las de las circunferencias? Anota las diferencias.
- Escribe como podrías, por simple inspección, identificar la ecuación de una circunferencia; ¿y la de una parábola?



c) Identifica, por simple inspección, el tipo de gráfica que corresponde a cada ecuación. Esboza las gráficas.

i) $x^2 = 8(x - 3)$

ii) $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$

iii) $x^2 + y^2 = 4$

iv) $25y^2 - 4x^2 - 100y - 36x + 25 = 0$

v) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

- vi) $(x+5)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$
- vii) $5x + 3y - 15 = 0$
- viii) $x^2 - 8y + 16 = 0$
- ix) $-2x^2 + 2y^2 + 4x + 4 = 0$
- x) $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$
- xi) $xy = 0$
- xii) $9x^2 + 9y^2 - 6x + 36y + 37 = 0$

- d) Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (4,1) y es tangente a la recta: $3x - 4y - 1 = 0$.
- e) Halla los puntos de intersección de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ y la parábola $y^2 = -9x$.
- f) ¿Cuál es el valor de c si el vértice de la parábola $y = x^2 - 8x + c$ está sobre el eje de las X ?
- g) ¿Para qué valores del coeficiente k , la recta $y = kx + 2$ corta a la parábola $y^2 = 4x$ en dos puntos? ¿Para qué valores es tangente a la parábola? ¿Para cuáles pasa por fuera de esta parábola?
- h) Escribe un algoritmo que resuelva el problema 'Dada la gráfica de una circunferencia, escribe su ecuación'.
- i) Escribe un algoritmo que resuelva el problema 'Dada la gráfica de una parábola, escribe su ecuación'.
- j) Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

24. Diseño de un puente

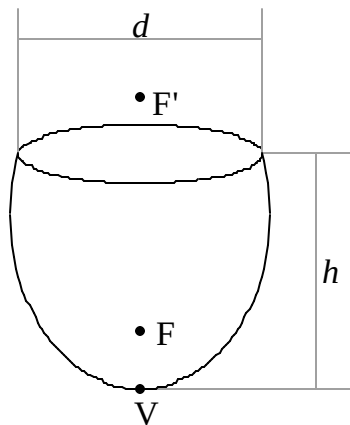
Se desea construir un puente para cruzar un río de 50 metros de ancho. El arco del puente debe ser semielíptico y tener tales dimensiones que pueda pasar por él un barco de 12.5 metros de ancho y 7.5 metros de alto.

- a) Deduce una ecuación para el arco
- b) Calcula aproximadamente la altura del arco a la mitad del puente

25. Reflector elíptico

La forma básica de un reflector elíptico es un semielipsoide de altura h y diámetro d , como se ve en la figura. Las ondas emitidas desde el foco, F , se reflejarán en la superficie, y llegarán al foco F' .

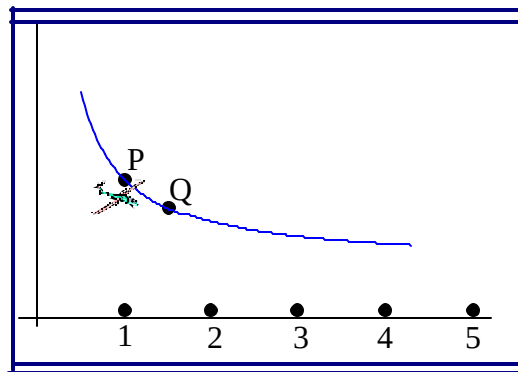
- a) Expresa las distancias VF y VF' en función de h y d .
- b) Se desea fabricar un reflector elíptico de 17 centímetros de modo que las ondas emitidas desde F se reflejan a un punto F' que está a 32 centímetros de V . Calcula el diámetro del reflector y el lugar de F .



26. Juego de video

En un juego de video, un aeroplano vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria representada por $y = 1 + \frac{1}{x}$, y dispara proyectiles en dirección tangente a la trayectoria, a blancos que están a lo largo del eje x en las posiciones $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 .

- Determina la pendiente de la tangente a la trayectoria en el punto $P(1, 2)$ y halla la ecuación de la recta tangente.
- ¿Da en algún blanco el proyectil que es disparado desde ese punto?
- Responde a los mismos incisos (a) y (b) cuando el avión está en el punto $Q(3/2, 5/3)$.



27. Cónicas

De cierta cónica se sabe que los focos son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y que la longitud de cada lado recto es 9.

- ¿Con estos datos puedes saber de qué cónica se trata?
- ¿Es posible determinar una elipse con estos datos? ¿cuál es su ecuación?
- ¿Es posible definir una hipérbola también? ¿cuál es su ecuación?

- d) Traza la elipse y la hipérbola en el mismo sistema de ejes coordenados en caso de que se pueda definir tales cónicas, y compara sus elementos, focos y vértices, de cada una.

28. Trayectoria de un barco

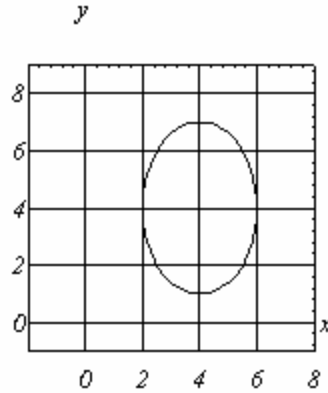
Un barco parte de un punto A y se mueve en línea recta hasta un punto B. A partir de B continúa su recorrido de tal manera que en todo momento el ángulo entre las visuales (desde el barco) con los puntos A y B es de 37° . El barco termina su viaje cuando se encuentra nuevamente en el punto A, habiendo recorrido en total una distancia de 9.65 kilómetros.

- a) ¿Cuál es la trayectoria del barco en su recorrido de regreso? (es decir desde B hacia A)
b) ¿Cuál es la distancia entre A y B?

29. Las otras cónicas

*Tras una visita de Edmund Halley en 1684, Newton regresó al estudio de su juventud del movimiento planetario. Durante dos años y medio estableció sus tres leyes de movimiento que dieron origen a la ciencia moderna de la dinámica. Newton aplicó estas leyes al movimiento orbital y a través de las leyes de Kepler derivó su ley de gravitación universal. Publicó su teoría en su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Estos estudios permitieron mostrar que las órbitas de los objetos alrededor de las fuentes gravitacionales como el sol o la tierra eran básicamente las secciones cónicas conocidas desde tiempos de los griegos. Estas leyes son las que se utilizan hoy en día cuando una sonda espacial es lanzada, cuando se han mandado naves a la Luna, Marte, Venus y los planetas exteriores.*

- a) Ya te diste cuenta de que las características de la gráfica determinan la ecuación y, en ciertas formas, las ecuaciones “retratan” a la gráfica. Ahora te corresponde encontrar las formas de las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola.
i) ¿Cuáles son los elementos geométricos que caracterizan a la elipse y cuáles a la hipérbola?
ii) Observa las ecuaciones y las gráficas de las curvas que se te proporcionan: ¿en qué parte de la ecuación están los elementos geométricos de la gráfica?

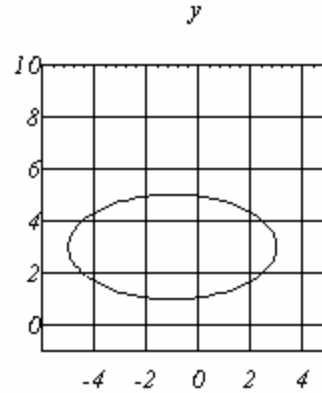


$$\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{4} + \frac{y^2 - 8y + 16}{9} = 1$$

$$9x^2 - 72x + 144 + 4y^2 - 32y + 64 = 36$$

$$9x^2 + 4y^2 - 72x - 32y + 172 = 0$$

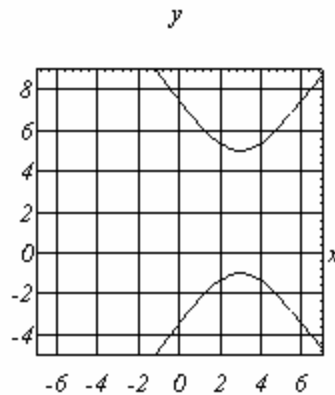


$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{16} + \frac{y^2 - 6y + 9}{4} = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 24y + 36 = 16$$

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 24y - 21 = 0$$

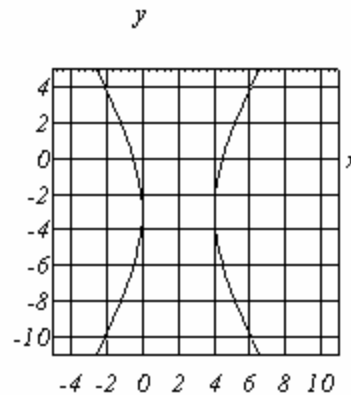


$$\frac{(y-3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{y^2 - 6y + 9}{9} - \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = 1$$

$$4y^2 - 24y + 36 - (9x^2 - 36x + 36) = 36$$

$$9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$$



$$\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+3)^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4} - \frac{y^2 + 6y + 9}{16} = 1$$

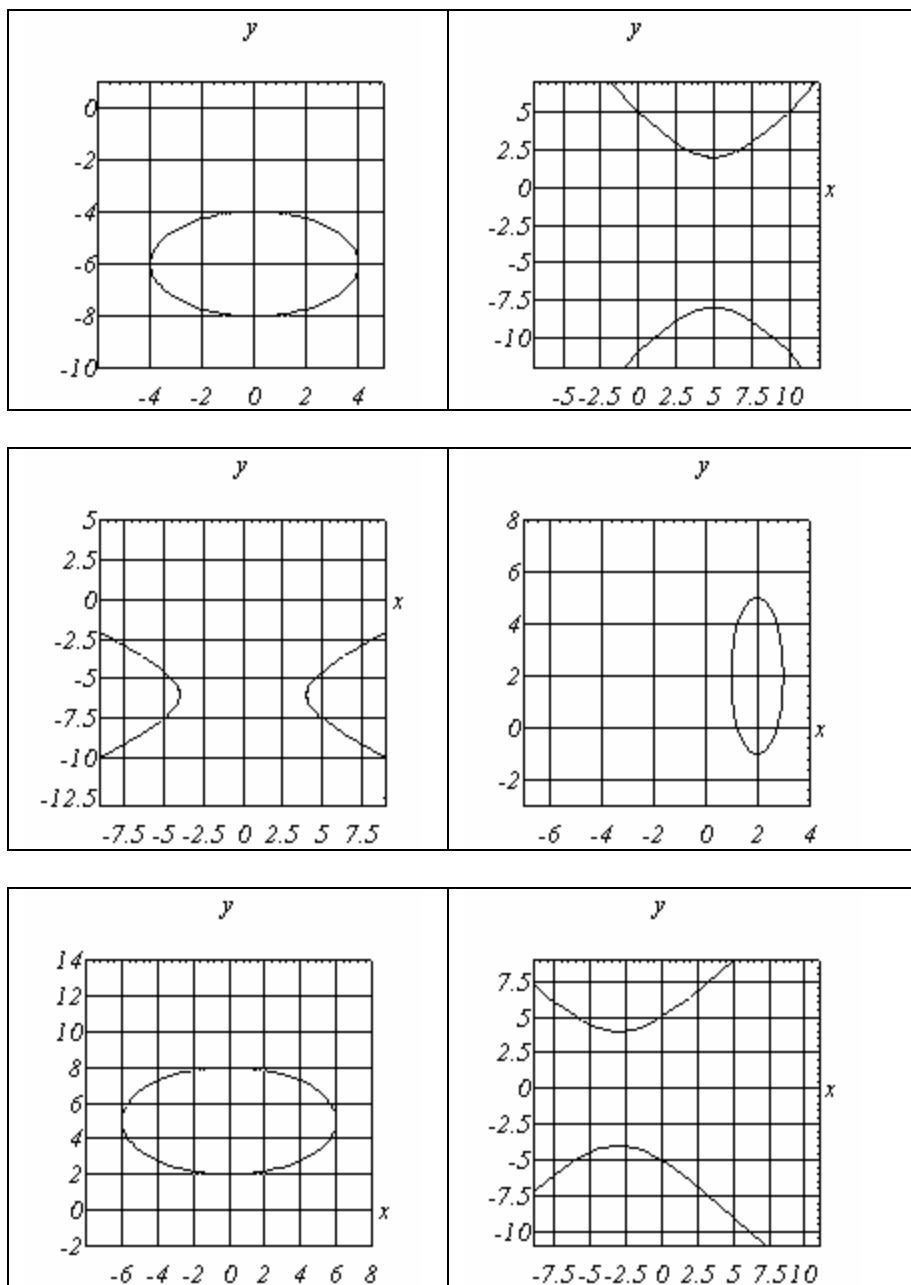
$$4x^2 - 16x + 16 - (y^2 + 6y + 9) = 16$$

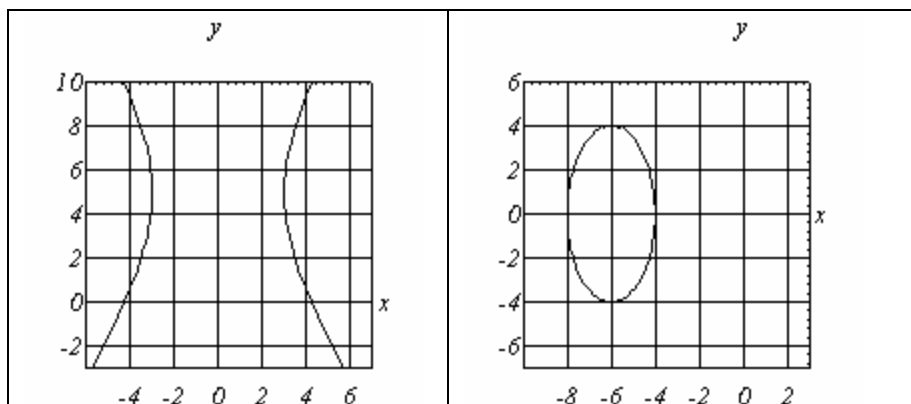
$$4x^2 - y^2 - 16x + 6y - 9 = 0$$

b) Encuentra las ecuaciones generales de las siguientes curvas (tanto de las elipses como de las hipérbolas).

Una vez que hayas obtenido las ecuaciones, haz una tabla con dos columnas, en una de ellas coloca las ecuaciones de las elipses y en la otra las de las hipérbolas y contesta:

- i) ¿Qué diferencia encuentras entre las ecuaciones de las elipses y las de las hipérbolas? Anota las diferencias.
- ii) Escribe como podrías, por simple inspección, identificar la ecuación de una parábola, de una circunferencia, de una elipse y de una hipérbola





c) Identifica, por simple inspección, el tipo de gráfica a la que corresponde cada ecuación. Graficalas.

- i) $\frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$
- ii) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 100$
- iii) $(x-2)^2 - (y+2)^2 = 40$
- iv) $x^2 - y^2 + 8x + 4y + 13 = 0$
- v) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$
- vi) $2x - 3y - 4 = 0$
- vii) $2x^2 - 8x - y + 8 = 0$
- viii) $x^2 + 4y^2 - 2x + 32y + 80 = 0$
- ix) $x^2 - y^2 = 0$

- d) Encuentra la ecuación de la elipse cuyo centro está en (0,-4) y sus vértices en (0,8) y (0,-8).
- e) Encuentra el centro, los focos y los vértices de la elipse cuya ecuación es:
 $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$.
- f) Dada la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, encuentra los valores de c en la recta $y = cx + b$ que la hacen intersectar sólo en un punto a la hipérbola.
- g) Escribe un algoritmo que resuelva el problema ‘Dada la gráfica de una elipse escribe su ecuación’.
- h) Escribe un algoritmo que resuelva el problema ‘Dada la gráfica de una hipérbola escribe su ecuación’.
- i) Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

30. Telescopio astronómico

Supón que la ecuación $31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$ representa la forma de un espejo reflector en un telescopio.

- Determina si el reflector en el telescopio es elíptico, parabólico o hiperbólico.
- Mediante rotación de ejes, dibuja la gráfica de la ecuación.
- Verifica tu resultado utilizando una calculadora graficadora
- Determina el ángulo utilizado para girar el espejo.

31. Ecuación general de una cónica

Dada una recta fija l , llamada directriz, y un punto fijo F , foco, no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante e , llamada excentricidad.

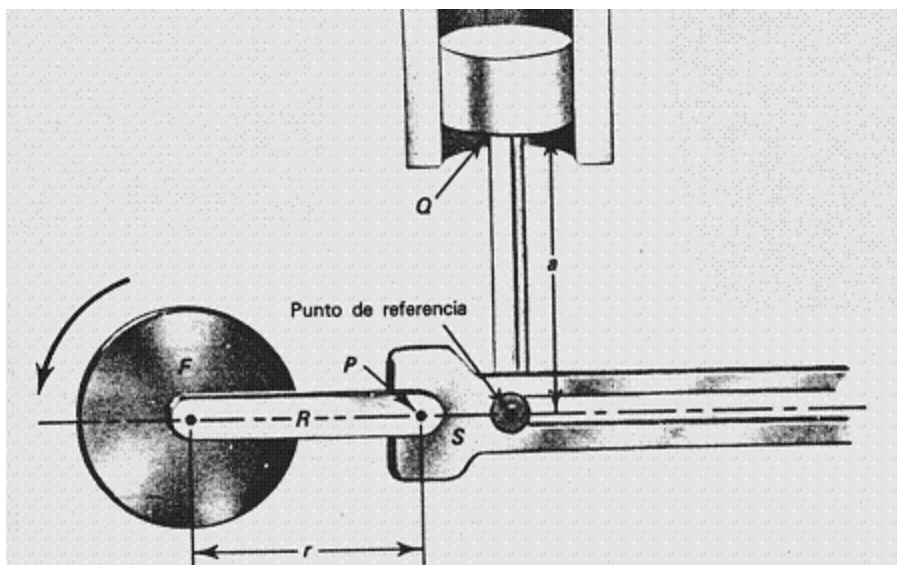
$$\frac{d(P, F)}{d(P, l)} = e$$

Supón que la directriz es el eje y y su foco es $F(p, 0)$

- Entonces, si $P(x, y)$ es el punto que se mueve, deduce la ecuación rectangular de la cónica y escríbela en su forma general.
- Considera el valor $e = 0$. Demuestra que la cónica se reduce a la ecuación de una circunferencia y halla su centro y radio.
- Supón que $e = 1$. Deduce que la ecuación de la cónica es una parábola y encuentra las coordenadas del vértice e indica su orientación.
- Ahora considera que $e < 1$, y demuestra que la ecuación representa una elipse. Halla sus semiejes, mayor y menor, las coordenadas de su centro, vértices, y las coordenadas del otro foco.
- En el caso de que $e > 1$, demuestra que la cónica es una hipérbola y encuentra sus elementos: semiejes transverso y conjugado, coordenadas del centro y vértices así como las coordenadas del otro foco.
- Considera la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cada una de excentricidad e , los focos $(ae, 0)$ y $(-ae, 0)$. Demuestra que las ecuaciones de sus directrices son: $x = \frac{a}{e}$ y $x = -\frac{a}{e}$, para cada foco.

32. El pistón

La figura representa una interpretación simplificada del funcionamiento de un pistón. Mientras el pistón $\mathfrak{x}$ desliza verticalmente, la barra (S) se mueve de tal manera que permanece horizontal en todo momento. El movimiento de la barra es producido por una manivela (R) que se encuentra fija al volante (F) que gira en sentido positivo convencional, a n revoluciones por segundo



- Describe la posición del punto Q (en la base) del pistón en términos del ángulo de rotación ? de la manivela.
- Describe la trayectoria de P (donde la manivela se conecta al eje) en términos del ángulo de rotación ? de la manivela.
- Determina la distancia recorrida por P y por Q.
- Expresa los resultados anteriores en función del tiempo.
- Determina la velocidad de los puntos P y Q.
- Aplica el Modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) a esta actividad de aprendizaje.

33. El micrófono

Una manera de describir la capacidad de un micrófono para recoger sonidos desde diferentes direcciones es examinar su patrón polar. Un sistema de coordenadas polares se establece con el micrófono en el origen. En este caso q se utiliza para localizar una fuente de sonido que se mueve en un círculo horizontal alrededor del micrófono, y r mide la amplitud de la señal que el micrófono detecta. La gráfica polar de r como función de q se denomina patrón polar del micrófono. Considera un patrón polar del micrófono dado por la ecuación $r = 2.5 + 2.5\cos q$.

- Construye una tabla de r y q , dando valores para q de 0° , 30° , 60° , ..., 330° .
- Dibuja la gráfica que corresponde al patrón polar del micrófono.
- Describe qué te enseña el patrón polar acerca del micrófono.
- ¿Cómo detectará el micrófono los sonidos provenientes detrás y delante de él?

34. Ecuación polar de una cónica

Supón que el foco, en caso de la parábola, o, uno de los focos en caso de elipse e hipérbola, coincide con el polo a una distancia p de la directriz l .

- a) Si el eje polar pasa por el eje focal y la directriz está a la izquierda del foco (polo). A partir de la ecuación general de cónica, deduce la ecuación polar de cónica

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos q},$$

- b) y si la directriz está a la derecha del foco (polo), demuestra que la ecuación polar de la cónica es

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos q}.$$

- c) De manera similar, si el eje focal coincide con el eje a 90° tal que la directriz sea paralela al eje polar y a p unidades de él, demuestra que la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \sin q},$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

III. Proyectos

1. Pregunta y responde

Este proyecto es una actividad que combina la formulación de preguntas, la resolución de problemas y la toma de decisiones, se trata de que hagas algo lo suficientemente complicado como para considerarlo un análisis de datos, en donde formules las preguntas que vas a responder y el método de análisis que vas a utilizar. Debe proporcionar evidencias acerca de tus procesos de razonamientos, matemático y estadístico, y de tu capacidad para construir e interpretar argumentos bien estructurados y contribuir a que comprendas, y enfrentes, algunas características de los datos reales, como la incertidumbre y la variabilidad de la información disponible sobre el mundo que te rodea, preparándote para que participes efectivamente en una sociedad saturada de información, que te exige constantemente demostrar que eres capaz de producir y comunicar descripciones, juicios, inferencias y opiniones razonados acerca de conjuntos muy diversos de datos.

En este proyecto puedes formular dos tipos de preguntas: si los datos van a ser generados por el equipo las preguntas pueden ser sobre cualquier tema, pero si van a usar datos generados por otras personas las preguntas tendrán que estar relacionadas con la educación. Una forma de asegurar que el proyecto trata de cuestiones de interés general, consiste en hacer un sondeo informal sobre los ‘grandes problemas’

del individuo, de la escuela, de la ciudad, del país, del mundo, del universo. Sin embargo, el tema del proyecto queda sujeto a la decisión del equipo y a la aprobación del profesor.

El informe deberá incluir las secciones:

1. Introducción.
2. Formulación de las preguntas alrededor de un problema significativo, con una justificación de por qué es significativo para el equipo.
3. Elaboración de un plan.
4. Instrumentación del plan.
5. Respuestas a las preguntas.
6. Evaluación de las respuestas y sugerencias para resolver el problema vinculado a las preguntas.
7. Conclusiones y nuevas preguntas
8. Cuestionario de Autoevaluación del Modelo PER.

En la evaluación de tu reporte de las actividades se considerarán los aspectos siguientes:

1. Uso apropiado del lenguaje y los símbolos matemáticos.
2. Construcción y presentación apropiadas de tablas y gráficas.
3. Corrección de los cálculos.
4. Elección y uso adecuados de tablas, gráficas y sumarios estadísticos cuando se recurre a fuentes de datos contenidas en otros estudios.
5. Descripciones razonadas e interpretaciones bien fundamentadas de los datos.
6. Obtención de conclusiones adecuadas mediante argumentos explícitos.

Algunos aspectos que conviene tener en cuenta:

En los *Benchmarks for Science Literacy* (1993) se describen algunos tipos específicos de razonamientos, matemático y estadístico, que conviene tener presentes cuando se realiza un proyecto:

Razonamiento acerca de los datos: reconocer o categorizar los datos como cuantitativos o cualitativos, discretos o continuos y saber cómo el tipo de datos conduce a un tipo particular de tabla, gráfica o medida.

Razonamiento acerca de las representaciones de los datos: comprender la forma en que un diagrama representa los datos, comprender cómo leer e interpretar una gráfica y saber cómo modificar una gráfica para mejor representar un conjunto de datos, ser capaces de ver más allá de los aspectos visibles para establecer relaciones entre las características pertinentes a las preguntas que se tienen que responder.

Razonamiento acerca de las medidas estadísticas: comprender qué dicen las medidas de centro, dispersión y posición acerca de un conjunto de datos, saber cuál es mejor usar en condiciones diferentes y cómo representan o no representan un conjunto de datos, saber que usar los sumarios para las predicciones será más preciso para muestras grandes que para muestras pequeñas, saber que un buen sumario de los datos incluye tanto una medida de centro como una de dispersión y que los sumarios de centro y dispersión pueden ser útiles para comparar conjuntos de datos.

Modelación: En el diseño del proyecto hay que considerar una situación como un sistema con un conjunto de elementos (por ejemplo, personas, máquinas), con

ciertas propiedades, que interactúan entre sí; es decir, que están sujetas a un conjunto de relaciones que las vinculan. El estudio del sistema puede permitir rediseñarlo adecuadamente, controlarlo, sacarle máximo provecho, disminuir riesgos, etc. Así, las respuestas a las preguntas que se formulen tendrán consecuencias en cuanto a permitir tomar mejor una decisión, controlar algún aspecto o predecir el curso de alguna característica. Y se requerirá de un modelo matemático explícito -con las inevitables simplificaciones que toman en cuenta, entre otros factores, nuestro interés, el conocimiento existente acerca del sistema, la posibilidad de obtención de datos y la necesidad de obtener resultados en un tiempo razonable.

2. La ciencia para todos

Escoge un libro de la colección ‘La ciencia para todos’ y participa en el concurso con el tipo de trabajo que corresponda según tu edad. Si el libro que escogiste no es de matemáticas, entonces, además del texto que entregues para concursar, redacta un informe en el que destagues el uso que se hizo de las matemáticas en el libro.

Los libros de matemáticas publicados son:

75. *La cara oculta de las esferas* de Luis Montejano Peimbert

77. *¿En qué espacio vivimos?* de Javier Bracho

163. *Las matemáticas, perejil de todas las salsas* de Ricardo Berlanga, Carlos Bosch y Juan José Rivaud

166. *Álgebra en todas partes* de José Antonio de la Peña

167. *Entre el orden y el caos: La complejidad* de Moisés Sametbant

168. *La caprichosa forma de Globión* de Alejandro Illanes Mejía

177. *Máthema: El arte del conocimiento* de Fausto Ongay

3. La Matemática, ¿se descubre o se inventa? (Filosofía y Matemática)

Lee los diálogos *Menón* y *Taeteto* de Platón y extrae las partes que tratan explícitamente de cuestiones matemáticas.

Reelabora las partes e incluye las secciones que juzgues necesarias para la comprensión del fragmento y de los problemas matemáticos y filosóficos que plantea.

Tu trabajo deberá incluir:

Un documento, impreso y en archivo digital, que comprende:

- a) El objetivo de la actividad.
- b) El plan de instrumentación.
- c) El guión de una representación dialogada.

- d) El guión de la discusión posterior a la representación.
- e) Las conclusiones.

Un video de la sesión en que se realizó la representación.

4. El que no conoce a Dios, dondequiera se anda hincando

Escoge un artículo en un periódico, o revista, reciente que te interese particularmente y que reporte los resultados de algún tipo de estudio de investigación o que informe de alguna decisión tomada a partir de un estudio. Asegúrate de que el artículo que escogiste proporcione suficiente información para que puedas responder las preguntas siguientes (que deberás usar como encabezados de las secciones de tu reporte) o investiga en las fuentes que cita. Incluye una copia del artículo.

Evaluación crítica:

1. ¿Cuál es el propósito del estudio de investigación que se describe en el artículo?
2. ¿Qué métodos se utilizaron para responder la pregunta de investigación?
3. ¿Qué preguntas le formularías a los investigadores para entender mejor el estudio?
4. ¿Hay algún aspecto del estudio que podría hacer que cuestionaras las conclusiones que se presentan en el artículo?

Por ejemplo, a partir de la nota periodística siguiente, se puede plantear la pregunta ¿cuál fue el argumento que sirvió a Profeco para sancionar a las compañías? Y recurrir a otras fuentes que permitan entender el argumento que utilizó la Profeco para sancionar a los productores.

Cualquier noticia, de cualquier medio, puede servir como punto de partida pero hay algunas publicaciones que dedican alguna sección a los resultados de la investigación.

(La nota se consultó en la siguiente dirección:

<http://www.reforma.com/nacional/articulo/008789/>)

Sanciona PROFECO productos fraudulentos

La Procuraduría señaló que entre los productos se encuentra el famoso jabón reductor 'Siluet 40', la solución para las varices 'Goicochea', y el enjuague supuestamente para dejar de fumar 'Quit'

Por ANGÉLICA CHÁVEZ/ *Reforma/México*

Cd de México.-El Procurador Federal del Consumidor, Eduardo Almeida, anunció este miércoles que varios productos comercializados por la empresa QBC de México, que se especializa en servicios de "telemercadeo", han sido retirados del mercado o bien se ha solicitado que su publicidad sea modificada, tras comprobarles que no producen los resultados que prometen.

Entre los productos retirados se encuentran dos de los jabones supuestamente reductores "Siluet 40", la supuesta solución para várices "Goicoechea", el enjuague supuestamente para dejar de fumar "Quit", la goma de mascar "Sexgum", supuestamente afrodisíaca y audíocasetes y discos motivacionales que se anunciaban como "subliminales".

Almeida informó que la empresa ya modificó los anuncios comerciales de los siguientes productos: faja térmica "Saunatronic 2000", regenerador capital "Cre-C"; y ligas ejercitadoras "F lash 9".

Los comerciales que deberán ser modificados en las próximas semanas son las cápsulas de gel supuestamente contra la celulitis, "Cel-U-tin", y la barra "Fataché", que supuestamente sirve para bajar de peso.

La empresa QBC de México ha recibido hasta la fecha 17 multas por un total de \$128 mil pesos, debido a la publicidad engañosa de estos productos.

(Para investigar más sobre la nota se puede consultar la dirección de internet:
<http://www.profeco.gob.mx/menu.htm>)

5. Enseña y aprende (Proyecto Descartes)

Escoge un problema que te haya resultado particularmente provechoso desde el punto de vista del aprendizaje logrado y conviértelo en una actividad del Proyecto Descartes. Puedes consultar en el sitio del Proyecto el tutorial para aprender a programar la escena Descartes (<http://descartes.cnice.mecd.es/>). El problema puede ser de este curso o de alguno de los anteriores.

6. La cultura matemática

Escoge un tema que te interese relacionado con las matemáticas, que puede ir desde 'la demostración en matemáticas', la invención en matemáticas', 'las matemáticas, ¿se inventan o se descubren?', '¿cómo se aprenden las matemáticas?' hasta el estudio de algún problema matemático, resuelto o no. Incluimos una nota periodística del 25 de mayo de 2000 que informa sobre un reto que te puede interesar.

(Se consultó en la siguiente dirección de internet:
<http://www.reforma.com/ciencia/nota/20000525/004410.htm>)

Hágase millonario con las matemáticas

Instauran un premio para motivar a nuevas generaciones de matemáticos

AP/Francia

Si la idea de sacar raíces cuadradas y resolver problemas algebraicos nunca le hizo muy feliz, considere esta posibilidad: varios de los principales matemáticos del mundo ofrecen 7 millones de dólares a quienes encuentren la solución de algunas de las ecuaciones más difíciles que plantea esa disciplina.

Tras buscar en vano durante años la solución de siete problemas matemáticos de primera fila, una fundación norteamericana presentó las ecuaciones al resto del mundo, en un reto llamado "Los problemas del millón de dólares".

Los matemáticos afirman que la eventual solución de tales problemas podría dar como resultado avances insólitos en las aplicaciones de la criptografía y la ciencia aeroespacial, y abriría campos matemáticos no imaginados siquiera hoy día.

El Instituto Clay de Matemáticas, que incluye a los matemáticos más preclaros del mundo, anunció el reto durante su reunión anual en París al mismo tiempo que lo anunciaba en su página cibernética.

"Los siete problemas matemáticos descuellan como los grandes problemas no resueltos del siglo XX", dijo Andrew Wiles, profesor de matemáticas de Princeton famoso por haber resuelto el llamado "último teorema de Fermat" en 1995.

"Confiamos en que, con la proclamación de los premios, incitaremos e inspiraremos a las futuras generaciones de matemáticos", dijo Wiles, de 45 años.

El grupo ha puesto un precio de un millón de dólares a cada uno de los problemas.

Pocos científicos confían, empero, que surjan pronto ganadores. "No hay límite de tiempo", dijo Arthur Jaffe, un profesor de matemáticas de Harvard que es presidente del instituto Clay. El profesor declaró que lo más pronto que podrían conocerse los ganadores sería dentro de cuatro años.

Según las reglas del concurso, las soluciones deben publicarse en una revista especializada en matemáticas y esperar durante dos años la reacción de la comunidad matemática. Una vez lograda esta aceptación, el instituto Clay comenzará su propio proceso de revisión para decidir si otorga el premio.

Pero los matemáticos observaron que unas pocas décadas, o incluso un siglo no es demasiado cuando se trata de resolver los problemas más difíciles que ofrece hoy día la ciencia de los números.

Los siete enigmas que forman parte del reto del Instituto Clay son el problema de P versus NP, la Conjetura de Hodge, la Conjetura de Poincaré, la Hipótesis de Riemann, la Brecha de existencia y masa de Yang-Mills, el Problema de existencia y suavidad de Navier-Stokes, y la Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

Ejercicios

Ejercicios

Introducción

En matemáticas es usual que se hable de *ejercicio* y *problema* y de que en muchos momentos se tomen como sinónimos. En esta *Guía* son cosas diferentes. En otra parte se trató lo de *problema*, aquí comentamos la idea que en esta *Guía* utilizamos para *ejercicio*.

Una característica del *ejercicio* es que con él se pretende que adquieras soltura en el manejo de ciertos procedimientos o en el tratamiento de ciertas situaciones que son útiles cuando te enfrentes a problemas.

Cuando te enfrentas a un ejercicio ya sabes lo que tienes qué hacer y hay que hacerlo. Puede tratarse, por ejemplo, de un algoritmo, como la aplicación de la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. Si ya dominas la aplicación de este algoritmo, cada vez que te encuentres una ecuación que tú reconoces de segundo grado, ya sabes que puedes resolverla y lo harás. En cambio, si tienes dificultades para aplicar la fórmula general, cada vez que necesites resolver una ecuación de segundo grado tendrás un problema.

También puede ser algo más laborioso como la aplicación del método de diferencias finitas para la obtención de la ecuación de una función polinomial a partir del conocimiento de ciertos valores que se conocen de la función.

Incluso puede tratarse de modelos algebraicos de problemas como la altura en función del tiempo que adquiere un cuerpo que es lanzado de alguna forma.

Cuando se te pide hacer un ejercicio, es porque cuentas con la información necesaria para ello. Usualmente consiste en una explicación de los pasos que tienes que seguir y estos son ejemplificados con un ejercicio resuelto, en el que se explican los pasos que se siguen. Esta explicación se puede realizar en el salón de clases (en este caso no sólo debes anotar lo que se te presenta en el pizarrón o algún otro medio, sino tomar las notas adicionales necesarias para que no se te olviden detalles) o puede estar escrita en un libro. No debes preocuparte sólo por reconocer los pasos que tienes que seguir para resolver el ejercicio, sino también busca entender el porqué de estos pasos. De esta forma estás en condiciones de darte cuenta si puedes aplicar algunos de los pasos del ejercicio en una situación parecida al ejercicio que ya sabes resolver.

Hay algo más. Dominas por completo un ejercicio cuando eres capaz de resolverlo sin consultar tus apuntes o la información que tienes del mismo. Por ejemplo, sabes resolver una ecuación de segundo grado por la fórmula general cuando, sin necesidad de consultar en tus apuntes, aplicas la fórmula general. Desde luego, para esto es necesario que tengas aprendida la fórmula de memoria. Pero la memorización se logra al aplicar varias veces la fórmula en ecuaciones de segundo grado.

En cambio, dominas a secas un ejercicio cuando puedes resolverlo consultando parte de la información de la que dispones (usualmente algunas fórmulas).

Si necesitas preguntar algo a un compañero o un profesor para resolver un ejercicio, entonces todavía no dominas el ejercicio y te hace falta más práctica.

Lo ideal es que domines por completo los ejercicios; de esta manera dispondrás de más tiempo para dedicarte a trabajar en los aspectos nuevos o desconocidos del problema al que te enfrentes.

En esta *Guía* se te señalan ejercicios para que los trabajes y en dónde puedes obtener la información que necesitas. En algunos casos los ejercicios señalados son suficientes para que llegues a dominarlos, pero en otros no y tú debes buscar o crear otros ejercicios para que sigas practicando. Hacerlo es parte de tu responsabilidad como estudiante.

Por cierto, tú mismo eres capaz de crear ejercicios cuando resuelves un problema y luego detallas los pasos que deben seguirse para resolver la situación del problema. Es decir, cuando elaboras una información similar a la que tú consultaste para resolver los ejercicios propuestos.

Aquí hay algo más sobre las características de un ejercicio:

¿Qué es un ejercicio?

Un ejercicio está fuertemente relacionado con un algoritmo o rutina, no necesariamente sencillos. Los más complejos pueden requerir la combinación de varios procedimientos con destrezas específicas. En un ejercicio puede requerirse una articulación de registros de representación, pero esta articulación suele estar ya incluida en el algoritmo, en la rutina o en el esquema. La administración de los conocimientos y procedimientos no es compleja, se reduce a organizar las llamadas a una serie de procedimientos ya hechos, generalmente hace poco tiempo. No busca una reconceptualización de los conocimientos sino la frecuentación de una vía ya abierta, la adquisición de una destreza. Su esquema metafórico es la suma no la integración. Puede ser laborioso, raramente difícil.

Tareas de los libros

Unidad 1

Sistemas de coordenadas, lugares geométricos y ejercicios de graficación

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 1 a 36.

Resuelve los ejercicios complementarios pares del 1-22 al 1-32, pp. 17 y 18.

Resuelve los ejercicios complementarios del 2-17 al 2-23, p. 37.

Lee haciendo las páginas 38 a 58.

Resuelve los ejercicios complementarios impares del 3-19 al 3-34, p. 59.

Unidad 2

La línea recta

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 64 a 78.

Resuelve los ejercicios complementarios pares del 4-12 al 4-33, pp. 78 y 79.

Lee haciendo las páginas 81 a 94.

Resuelve los ejercicios complementarios impares del 5-9 al 5-18, pp. 93 y 94.

Unidad 3

La circunferencia

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 95 a 106.

Resuelve los ejercicios complementarios pares del 6-11 al 6-16, p. 106.

Lee haciendo las páginas 111 a 127.

Resuelve los ejercicios complementarios impares del 7-15 al 7-21, pp. 127 y 128.

Unidad 4

Secciones cónicas

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 111 a 127.

Resuelve los ejercicios complementarios pares del 7-22 al 7-28, pp. 127 y 128.

Lee haciendo las páginas 130 a 140.

Resuelve los ejercicios complementarios del 8-6 al 8-7, p. 140.

Unidad 5

Ecuaciones cartesianas de las cónicas

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 158 a 172.

Resuelve los ejercicios complementarios del 10-12 al 10-15, p. 173.

Lee haciendo las páginas 144 a 156.

Resuelve los ejercicios complementarios pares del 9-12 al 9-22, p. 157.

Unidad 6

La ecuación general de segundo grado

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 192 a 204.

Resuelve los ejercicios complementarios del 12-12 al 12-15, p. 204.

Lee haciendo las páginas 192 a 204.

Resuelve los ejercicios complementarios del 12-16 al 12-21, pp. 204 y 205.

Unidad 7

Trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Lee haciendo las páginas 175 a 187.

Resuelve los ejercicios complementarios del 11-12 al 11-15, pp. 187 y 188.

Lee haciendo las páginas 175 a 187.

Resuelve los ejercicios complementarios del 11-16 al 11-19, p. 188.

Unidad 8

Coordenadas y ecuaciones polares

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Resuelve el Examen 4 de la p. 206.

Teoría y Práctica de Geometría Analítica de Peter H. Selby

Resuelve el Examen de mitad de periodo de las pp. 141 y 142.

Ejercicios Complementarios

Unidad 1

Sistemas de coordenadas, lugares geométricos y ejercicios de graficación

1. El cuadrado ABCD se encuentra sobre los ejes coordenados de tal manera que el lado AB está sobre el eje x , y el eje y biseca AB. ¿Cuáles son las coordenadas de A, C y D si $AB = 6$?
2. El cuadrado ABCD se coloca sobre los ejes coordenados de tal manera que el eje y biseca AB y CD, y el eje x biseca BC y AD. Asigna coordenadas a A, B, C y D.
3. Demuestra que los puntos $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(1, -1)$ y $(2, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.
4. Halla las coordenadas de un punto en el eje x , que sea equidistante de $(0, 4)$ y $(-3, -3)$.
5. Halla las coordenadas de dos puntos cuyas distancias a $(2, 3)$ son 4, y cuyas ordenadas son iguales a 5.
6. Una circunferencia de radio 5 y tangente al eje x se dibuja pasando por el punto $A(1, -2)$. Determina las coordenadas del centro C de dicha circunferencia.
7. Determina (prueba analíticamente) si cada punto de los que siguen está dentro, en, o fuera de la circunferencia cuyo centro está en $(-2, 3)$ y tiene radio 5. $(1, 7)$, $(-3, 8)$, $(2, 0)$, $(-5, 7)$, $(-5, 7)$, $(0, -1)$, $(-5, -1)$, $(-6, 6)$ y $(4, 2)$.
8. Mediante el método de coordenadas demuestra la siguiente afirmación “Las diagonales de un rectángulo son iguales”.
9. Dados los puntos vértices $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ y $C(-5, 7)$ de un triángulo. Halla los puntos medios de sus lados.
10. Halla los puntos de cuatrisección del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(7, 5)$.
11. Los extremos de un segmento son $A(2, 4)$ y $B(8, -4)$. Halla el punto $P(x, y)$ que divide este segmento en dos partes tales que $BP/PA = -2$.
12. Los puntos $M(2, -1)$, $N(-1, 4)$ y $P(-2, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Halla sus vértices.
13. Los vértices de un triángulo son $(2, -1)$, $(-4, 7)$, $(8, 0)$. Halla, para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demuestra que este punto es el mismo para cada una de las

medianas y, por tanto, que las medianas concurren en un punto. Este punto se llama baricentro del triángulo.

14. En el triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , demuestra que las coordenadas del baricentro son

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Utiliza este resultado para comprobar el ejercicio 13.

15. Halla el área de polígono $(-3, 7)$, $(6, 5)$, $(2, 12)$, $(-2, 0)$.
16. Sabiendo que el área del cuadrilátero es de 25.5 unidades de superficie, halla el valor de y en uno de sus vértices: $(-1, 3)$, $(0, y)$, $(-3, -4)$ y $(-5, 1)$. (dos soluciones)
17. Halla la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(2, -3)$.
18. Grafica la recta, en la forma más simple, que pasa por el punto $(7, 1)$ y que tiene pendiente $m = -\frac{1}{3}$.
19. Aplicando el concepto de pendiente averigua si los siguientes puntos son colineales $(a, 0)$, $(2a, -b)$ y $(-a, 2b)$.
20. Calcula el valor de x para el cual la recta que pasa por $(x, 2)$ y $(1, 0)$ es paralela a una cuya pendiente es 2.
21. En referencia al problema 20 encuentra el valor de x para que la recta que pase por esos puntos sea perpendicular a una cuya pendiente sea -2 .
22. Demuestra analíticamente que las diagonales de un rombo se intersecan formando ángulo recto.
23. Halla los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $(-3, 2)$, $(-4, -2)$ y $(3, 3)$.
24. Determina la pendiente de la recta L_1 , si el ángulo entre L_1 y L_2 es de 135° , y la pendiente de L_2 es -3 .
25. Construye las gráficas de las siguientes ecuaciones
- a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $4x^2 + 9y^2 = 36$ c) $9x^2 + 4y^2 = 36$
- d) $x^2 - y^2 = 4$ e) $y^2 - x^2 = 4$ e) $xy - 2y - 3 = 0$

En los ejercicios 26 a 30, halla la ecuación del lugar geométrico para cada una de las siguientes condiciones:

26. Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(2, -1)$ es siempre igual a su distancia del eje y .
27. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(1, -3)$ y $B(3, 0)$ es siempre igual a 12. (Dos casos).
28. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1, 1)$ es siempre igual a su distancia del eje y aumentada en 2.
29. Dados los puntos $A(1, -1)$, $B(1, 5)$ y $C(1, 1)$. Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que el producto de las pendientes de PA y PB se igual a la pendiente de PC .
30. Dados los puntos $A(-1, 4)$ y $B(4, 2)$. Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que la pendiente de PA sea el recíproco, con signo contrario, de la pendiente de PB .

Unidad 2

La línea recta

1. Halla la ecuación de la recta que pase
 - a) por $(-6, 7)$ y cuya pendiente sea $2/3$,
 - b) por $(3, -1)$ y $(7, 6)$,
 - c) $(-3, 3)$ y $(-3, -2)$,
 - d) $(-2, 1)$ y $(5, 1)$
1. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(5, 8)$, $D(7, 1)$. Halla las ecuaciones de sus lados.
2. Una recta de pendiente -3 pasa por el punto $A(-3, 6)$. Halla su ecuación en la forma simétrica.
3. Una recta pasa por el punto $A(5, 6)$ y es paralela (perpendicular) a la recta que pasa por $C(-4, 0)$ y $D(1, -6)$. Halla su ecuación.
4. Halla las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección en el triángulo $A(0, -1)$, $B(6, 5)$ y $C(8, -5)$.
5. Para el mismo triángulo referido del ejercicio 4 encuentra las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama circuncentro.
6. Para el mismo triángulo del ejercicio 4 halla las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. Este punto se llama ortocentro.

7. En el triángulo del ejercicio 4 halla las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado AC. A partir de estas coordenadas encuentra la longitud de la altura y luego el área del triángulo.
8. Determina los vértices del triángulo cuyos lados satisfacen a $x - 5y + 14 = 0$, $4x - y - 1 = 0$ y $3x + 4y + 4 = 0$.
9. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos (0, 1), (3, -8) y (-4, -1).
10. Determina los interceptos con los ejes coordenados de la recta $2x - 3y - 12 = 0$.
11. Determina cuáles de los siguientes puntos (3,1), (2,3), (6,3), (-3,-3), (3,-1), (-2,1) están situados en la recta $2x - 3y - 3 = 0$ y cuáles no lo están.
12. Halla el valor de K para que la recta $(K+2)x + (K-2)y - 10 = 0$ sea paralela a la recta $x + 2y + 2 = 0$.
13. Determina el valor de K para que la recta $K^2x + (2K-2)y + 2 = 0$ sea perpendicular a la recta $x - 2y + 5 = 0$.
14. Halla la distancia de la recta $ax - by = 2a^2$ al punto $(3a, -b)$.
15. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $5x + 12y - 5 = 0$ y que dista 4 unidades de ella (dos soluciones).
16. Dadas las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, y la ecuación de una de sus diagonales $3x + 2y + 3 = 0$, determina las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.
17. Los lados de un triángulo están en las rectas $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Calcula su área.
18. El área de un triángulo es $S = 8$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A(1,-2), B(2,3) y el tercer vértice C está en la recta $2x + y - 2 = 0$. Determina las coordenadas del vértice C.
19. El área de un triángulo es $S = 1.5$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A(2,-3) y B(3,-2) y el centro de gravedad (baricentro) de este triángulo está en la recta $3x - y - 8 = 0$. Determina las coordenadas del tercer vértice C.
20. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo $2x - 3y + 5 = 0$; $3x + 2y - 7 = 0$ y uno de sus vértices A(2,-3), halla las ecuaciones de los otros dos lados de este rectángulo.

21. Dadas las ecuaciones de dos de los lados de un rectángulo $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ y la ecuación de una de sus diagonales $7x + y - 15 = 0$, halla los vértices del rectángulo.
22. Halla en la recta $2x - y - 5 = 0$ un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos A(-7, 1), B(-5, 5) sea mínima.
23. Dada la recta $2x + 3y + 4 = 0$, halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,1) y forma un ángulo de 45° con la recta dada.
24. El punto A(-4,5) es un vértice del cuadrado cuya diagonal está en la recta $7x - y + 8 = 0$. Halla las ecuaciones de los lados y de la segunda diagonal de este cuadrado.
25. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado A(-1,3) y C(6,2), halla las ecuaciones de sus lados.
26. El punto E(1,-1) es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $x - 2y + 12 = 0$. Halla las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados de este cuadrado.
27. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$, demuestra que este triángulo es isósceles. Resuelve este problema comparando los ángulos de este triángulo.
28. Demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y es paralela a la recta $Ax + By + C = 0$, puede escribirse en la forma siguiente:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$
29. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es paralela a la recta $16x - 24y - 7 = 0$ (indicación: usa el resultado del ejercicio anterior).
30. Demuestra que la condición de perpendicularidad de las rectas
 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
 puede escribirse de la manera siguiente:
 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$
31. Determina qué pares de rectas son perpendiculares:
- a) $\frac{3x - y + 5 = 0}{x + 3y - 1 = 0}$, b) $\frac{3x - 4y + 1 = 0}{4x - 3y + 7 = 0}$,
 c) $\frac{6x - 15y + 7 = 0}{10x + 4y - 3 = 0}$, d) $\frac{9x - 12y + 5 = 0}{8x + 6y - 13 = 0}$,
 e) $\frac{7x - 2y + 1 = 0}{4x + 6y + 17 = 0}$, f) $\frac{5x - 7y + 3 = 0}{3x + 2y - 5 = 0}.$

32. Dados dos vértices de un triángulo $A(-10, 2)$ y $B(6, 4)$, cuyas alturas se cortan en el punto $Q(5, 2)$, determina las coordenadas del tercer vértice C .
33. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo ABC , si se dan uno de sus vértices $(1, 3)$ y las ecuaciones de dos medianas $x - 2y + 1 = 0$; $y - 1 = 0$.
34. Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se dan uno de sus vértices $B(-4, -5)$ y las ecuaciones de dos alturas $5x + 3y - 4 = 0$ y $3x + 8y + 13 = 0$.
35. Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de los vértices $A(4, -1)$ y las ecuaciones de dos bisectrices $x - 1 = 0$ y $x - y - 1 = 0$.
36. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas, sabiendo que la longitud de su segmento comprendido entre las rectas $2x - y + 5 = 0$, $2x - y + 10 = 0$, es igual a $\sqrt{10}$.
37. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $C(-5, 4)$, sabiendo que la longitud de su segmento entre las rectas $x + 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, es igual a 5.
38. Determina para qué valor de a la recta

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$
 a) es paralela al eje de abscisas;
 b) es paralela al eje de ordenadas;
 c) pasa por el origen de coordenadas.
 En cada caso escribe la ecuación de la recta.
39. Determina para qué valores de m y n la recta
 $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ es paralela al eje de abscisas e intercepta en el eje de ordenadas un segmento igual a -3 (partiendo del origen de coordenadas). Escribe la ecuación de esta recta.
40. Demuestra que, en los casos siguientes, son paralelas las dos rectas dadas:
 a) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$,
 b) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$,
 c) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$,
 d) $y + 3 = 0$, $5y - 7 = 0$.
41. Demuestra que, en los casos siguientes, coinciden las dos rectas dadas:
 a) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$,
 b) $x - \sqrt{2}y = 0$, $\sqrt{2}x - 2y = 0$,
 c) $\sqrt{3}x - 1 = 0$, $3x - \sqrt{3} = 0$,
42. Determina para qué valores de a y b las dos rectas

$$ax - 2y - 1 = 0, \quad 6x - 4y - b = 0$$

- a) tienen un punto en común,
- b) son paralelas,
- c) coinciden.

43. Determina para qué valores de m y n las dos rectas

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

- a) son paralelas,
- b) coinciden,
- c) son perpendiculares.

44. Calcula el área del triángulo que forma la recta $3x - 4y - 12 = 0$ con los ejes coordenados.

45. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -5)$ e intercepta con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

46. El punto $A(2, -5)$ es un vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $x - 2y - 7 = 0$. Calcula el área de este cuadrado.

47. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$$3x - 2y - 5 = 0, \quad 2x + 3y + 7 = 0 \text{ y uno de sus vértices } A(-2, 1), \text{ calcula el área de este rectángulo.}$$

48. Calcula la distancia d entre las rectas paralelas

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3x - 4y - 10 = 0, & \text{b) } 5x - 12y + 26 = 0, \\ 6x - 8y + 5 = 0, & 5x - 12y - 13 = 0, \\ \text{c) } 4x - 3y + 15 = 0, & \text{d) } 24x - 10y + 39 = 0, \\ 8x - 6y + 25 = 0, & 12x - 5y - 26 = 0. \end{array}$$

49. Dos lados de un cuadrado están en las rectas $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Calcula su área.

50. Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $3x - 4y - 10 = 0$, que se encuentran a 3 unidades de distancia de ella.

51. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado $A(2, 0)$ y $B(-1, 4)$, halla las ecuaciones de sus lados.

52. El punto $A(5, -1)$ es un vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $4x - 3y - 7 = 0$. Halla las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados de este cuadrado.

53. Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las dos rectas $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$.

54. Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las dos rectas
 $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.

Unidad 3

La Circunferencia

- El punto $C(3, -1)$ es el centro de una circunferencia que intercepta en la recta
 $2x - 5y + 18 = 0$
una cuerda, cuya longitud es igual a 6. Halla la ecuación de esta circunferencia.
- Escribe las ecuaciones de las circunferencias de radio $R = \sqrt{15}$, que son tangentes a la recta $x - 2y - 1 = 0$ en el punto $M_1(3, 1)$
- Halla la ecuación de la circunferencia que, teniendo el centro en la recta
 $2x + y = 0$,
es tangente a las rectas
 $4x - 3y + 10 = 0$; $4x - 3y - 30 = 0$
- Halla las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a dos rectas concurrentes:
 $7x - y - 5 = 0$; $x + y + 13 = 0$ y, una de ellas, en el punto $M_1(1, 2)$.
- Halla las ecuaciones de las circunferencias que teniendo sus centros en la recta
 $4x - 5y - 3 = 0$,
son tangentes a las rectas
 $2x - 3y - 10 = 0$; $3x - 2y + 5 = 0$
- Halla las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las tres rectas:
 $3x + 4y - 35 = 0$; $3x - 4y - 35 = 0$; $x - 1 = 0$
- ¿Qué ecuaciones de las expuestas a continuación determinan una circunferencia? Halla el centro C y el radio R de cada una de ellas:

1) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$;	6) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
2) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$;	7) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
3) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$;	8) $x^2 + y^2 + x = 0$;
4) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$	9) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;	10) $x^2 + y^2 + y = 0$
- Averigua que líneas determinan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
1) y = +\sqrt{9-x^2}; & 6) y = 15 - \sqrt{64-x^2}; \\
2) y = -\sqrt{25-x^2}; & 7) x = -2 - \sqrt{9-y^2}; \\
3) x = -\sqrt{4-y^2}; & 8) x = -2 + \sqrt{9-y^2}; \\
4) x = +\sqrt{16-y^2}; & 9) y = -3 - \sqrt{21-4x-x^2}; \\
5) y = 15 + \sqrt{64-x^2}; & 10) y = -5 + \sqrt{40-6y-y^2};
\end{array}$$

9. Halla la ecuación del diámetro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$$

que es perpendicular a la recta

$$5x + 2y - 13 = 0$$

10. Halla la distancia mínima del punto a la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) $A(6, -8); x^2 + y^2 = 9$

b) $B(3, 9); x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$

c) $C(-7, 2); x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$

11. Determina para qué valores del coeficiente angular k la recta $y = kx$

a) corta a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;

b) es tangente a esta circunferencia;

c) pasa fuera de esta circunferencia.

12. Halla la ecuación del diámetro de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$x - 2y - 3 = 0$$

13. Halla la ecuación de la cuerda de la circunferencia

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 169$$

que se divide por la mitad en el punto $M(8.5, 3.5)$

14. Determina la longitud de la cuerda de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$$

que se divide por la mitad en el punto $A(1, 2)$

15. Determina la longitud de la cuerda común a las dos circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$$

16. El centro de una circunferencia está en la recta

$$x + y = 0$$

Halla la ecuación de esta circunferencia, si se sabe que pasa por el punto de intersección de las dos circunferencias:

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 50, \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$$

17. Desde el punto A(1, 6) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$$

Halla sus ecuaciones.

18. Desde el punto A(4, 2) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 10$$

Determina el ángulo formado por estas tangentes

19. Desde el punto C(6, -8) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25$$

Calcula la distancia d del punto C a la cuerda que une los puntos de contacto.

20. Calcula la longitud de la tangente trazada desde el punto A(1, -2) a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$$

Unidad 4

Secciones cónicas

1. Halla el conjunto de centros de las circunferencias que son tangentes a una recta y pasan por un punto dado.
2. Una varilla se desliza contra un muro y el piso, que forman un ángulo recto. Encuentra qué lugar geométrico genera el punto medio de la varilla.
3. Las ecuaciones lineales $4x + 1.5y = 6$, $-4x + 1.5y = 6$ y $x - y = 0$ son generatrices de un cono circular recto y el plano de corte respectivamente, con su secciones transversales. Con esta consideración se obtiene una elipse, halla la longitud del eje mayor.
4. Las ecuaciones lineales $8x + 5y - 20 = 0$, $8x - 5y + 20 = 0$ y $8x - 5y - 5 = 0$ son generatrices de un cono circular recto y el plano de corte respectivamente, con sus secciones transversales. Con esta consideración se obtiene una parábola. Si el foco se

encuentra en el punto (1.123, 0.797) encuentra la distancia focal (distancia del vértice al foco).

5. Las ecuaciones lineales $8x + 7y - 28 = 0$, $8x - 7y + 28 = 0$ y $x + 2 = 0$ son generatrices de un cono circular recto y el plano de corte respectivamente, con sus secciones transversales. Con esta consideración se obtiene una hipérbola. Si los focos están en los puntos (-2, 0.963) y (-2, 7.037), halla la excentricidad de esta hipérbola.
6. El espejo de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide finito, de 20 centímetros de diámetro; su profundidad es de 2.5 centímetros. ¿A qué distancia del centro del espejo convergerá la luz procedente de una estrella lejana?
7. Una antena parabólica para satélites tiene forma paraboloide, con 10 pies de diámetro y 3 pies de profundidad. ¿A qué distancia del centro del plato se debe colocar el receptor para captar la mayor intensidad de las ondas de sonido?
8. Un reflector sonoro se usa en eventos deportivos al exterior, y tiene la forma de un paraboloide con su foco a 5 pulgadas de su vértice. Calcule el diámetro que debe tener si su profundidad debe ser 2 pies.
9. El cometa de Halley tiene una órbita elíptica de excentricidad $e = 0.967$. La distancia mínima de ese cometa al Sol es 0.587 UA. Calcular la distancia máxima del cometa al astro central, aproximando al décimo de UA más cercano.
10. La estación A de guardacostas está 200 mi al este de otra estación B. Un barco navega en una línea paralela y 50 mi al norte de la recta que pasa por A y B. Se mandan señales de radio de A y B, a una velocidad de 980 pie/ μ s (pies por microsegundo). A la 1:00 PM la señal de B llega al barco 400 μ s después de la señal de A. Determine la posición del buque a esa hora.
11. Dos estaciones de LORAN están a una distancia de 400Km entre sí a lo largo de un litoral recto. Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las dos señales LORAN. ¿En qué lugar tocará tierra si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo? ¿Si el barco quiere entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones, a 25Km de la estación maestra, qué diferencia debe buscar?

Unidad 5

Ecuaciones cartesianas de las cónicas

1. Un cable de acero está colgado por los dos extremos; los puntos de suspensión están situados a una misma altura y a una distancia de 20 m. La magnitud de la flexión a la distancia de 2 m de los puntos de suspensión en sentido horizontal, es igual a 14.4 cm. Determina la magnitud de suspensión de este cable en su punto medio (la flecha), suponiendo que el cable tiene una forma de parábola.

2. Averigua las líneas que determinan las ecuaciones siguientes:

$$1)y = +2\sqrt{x}, \quad 2)y = +\sqrt{-x}, \quad 3)y = -3\sqrt{-2x}, \quad 4)y = -2\sqrt{x}, \\ 5)x = +\sqrt{5y}, \quad 6)x = -5\sqrt{-y}, \quad 7)x = -\sqrt{3y}, \quad 8)x = +4\sqrt{-y}$$

3. Averigua las líneas que determinan las ecuaciones siguientes

$$1)y = 3 - 4\sqrt{x-1}, \quad 2)x = -4 + 3\sqrt{y+5}, \quad 3)x = 2 - \sqrt{6-2y}, \quad 4)y = -5 + \sqrt{-3x-21}$$

4. Halla los puntos de intersección de la recta $x + y - 3 = 0$ y la parábola $x^2 = 4y$

5. ¿Para qué valores del coeficiente angular k , la recta $y = kx + 2$:

- 1) corta a la parábola $y^2 = 4x$?
- 2) es tangente a ella?
- 3) pasa por fuera de esta parábola?

6. Deduce la condición según la cual, la recta $y = kx + b$ es tangente a la parábola $y^2 = 2px$.

7. Halla las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 36x$ trazadas desde el punto $A(2,9)$.

8. Determina los puntos de intersección de las parábolas:
 $y = x^2 - 2x + 1$, $x = y^2 - 6y + 7$

9. Halla la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje de ordenadas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:

- a) sus semiejes son iguales respectivamente a 7 y 2;
- b) su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre sus focos $2c = 8$;
- c) la distancia entre sus focos $2c = 24$ y la excentricidad $e = \frac{12}{13}$;
- d) su eje menor es igual a 16 y la excentricidad $e = \frac{3}{5}$;
- e) la distancia entre sus focos $2c = 6$ y la distancia entre las directrices es igual a $\frac{50}{3}$;
- f) la distancia entre sus directrices es igual a $\frac{32}{3}$ y la excentricidad es igual a $e = \frac{3}{4}$

10. Dada la elipse

$$9x^2 + 25y^2 = 25$$

Halla:

- a) sus semiejes;

- b) sus focos;
- c) su excentricidad;
- d) las ecuaciones de sus directrices.

11. Halla en la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ los puntos cuyas abscisas son iguales a -3.

12. Averigua qué líneas determinan las ecuaciones siguientes:

a) $y = +\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

b) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$

c) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$

b) $x = +\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$

13. Determina los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ y de la parábola $y^2 = 24x$.

14. La elipse es tangente al eje de abscisas en el punto A(3, 0) y al eje de ordenadas en el punto B(0, -4). Halla la ecuación de esta elipse, sabiendo que sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

15. El punto C(-3, 2) es el centro de una elipse, que es tangente a los dos ejes coordenados. Halla la ecuación de esta elipse, sabiendo que sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

16. Verifica que cada una de las ecuaciones siguientes determinan una elipse y hallar las coordenadas del centro C, los semiejes, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices:

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

b) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

c) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

17. Halla la ecuación de la elipse, sabiendo que su eje mayor es igual a 26 y los focos son $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$.

18. Halla la ecuación de la elipse cuyo eje menor es igual a 2 y los focos son $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$.

19. Halla los puntos de intersección de la recta

$$x + 2y - 7 = 0$$

y la elipse

$$x^2 + 4y^2 = 25$$

20. ¿Para qué valores de m la recta $y = -x + m$

- a) corta a la elipse
- b) es tangente a ella;
- c) pasa fuera de esta elipse?

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$$

21. Halla las ecuaciones de las tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$$

que son paralelas a la recta $3x + 2y + 7 = 0$

22. Desde el punto $P(-16, 9)$ se han trazado tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Calcula la distancia d del punto P a la cuerda de la elipse que une los puntos de contacto.

23. Halla la ecuación de la elipse que es tangente a las dos rectas

$$3x - 2y - 20 = 0, \quad x + 6y - 20 = 0$$

si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

24. Halla la ecuación de la elipse cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se conoce la ecuación de la tangente a la elipse

$$3x + 10y - 25 = 0$$

y su semieje menor $b = 2$.

25. Calcula el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

y la recta $9x + 2y - 24 = 0$

26. Averigua que líneas determinan las ecuaciones siguientes:

a) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

b) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$

c) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$

d) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$

27. Determina los puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ cuyas distancias al foco izquierdo son iguales a 7.

28. Halla la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en el eje de las abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se dan:

a) los puntos $A(6, -1)$ y $B(-8, 2\sqrt{2})$ de la hipérbola,

b) el eje conjugado 4 y la excentricidad $e = \sqrt{2}$,

c) el punto de $M(9/2, -1)$ de la hipérbola y las ecuaciones de las asíntotas

$$y = \pm \frac{2}{3}x$$

29. Determina la excentricidad de una hipérbola equilátera.

30. Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
Halla la ecuación de dicha hipérbola, si su excentricidad es $e = 2$.

31. Demuestra que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a sus dos asíntotas es una cantidad constante, igual a $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

32. Demuestra que el área del paralelogramo, limitado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las rectas trazadas por cualquiera de sus puntos y paralelas a las asíntotas, es una cantidad constante igual a

$$\frac{ab}{2}$$

33. Verifica que cada una de las ecuaciones siguientes determina una hipérbola y halla las coordenadas de su centro C, los semiejes, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y las ecuaciones de las directrices:

$$a) 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$$

$$b) 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0;$$

$$c) 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0;$$

34. Averigua qué líneas determinan las ecuaciones siguientes:

$$a) y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5};$$

$$b) y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4y + 8};$$

$$c) x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8};$$

$$d) x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$$

Representa estas líneas en el plano.

35. Se da la ecuación de una hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, halla su ecuación en el nuevo sistema, tomando sus asíntotas por ejes coordenados.

36. Halla los puntos de intersección de la recta $2x - y - 10 = 0$ y la hipérbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

37. Determina los valores de m para los que la recta $y = \frac{5}{2}x + m$

a) corta a la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) es tangente a ella:

c) pasa por fuera de la hipérbola.

38. Deduce la condición según la cual la recta $y = kx + m$ es tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

39. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en su punto $M(x, y)$.

40. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ que son perpendiculares a la recta $4x + 3y - 7 = 0$

41. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{16^2} - \frac{y^2}{64^2} = 1$ que son paralelas a la recta $10x - 3y + 9 = 0$

42. Halla en la hipérbola $\frac{x^2}{24^2} - \frac{y^2}{18^2} = 1$ el punto M más próximo a la recta $3x + 2y + 1 = 0$

43. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ trazadas desde el punto $A(-1, -7)$.

44. Desde el punto $C(1, -10)$ se han trazado tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{32^2} = 1$. Halla la ecuación de la cuerda que una los puntos de contacto.

45. Una hipérbola pasa por el punto $A(\sqrt{6}, 3)$ y es tangente a la recta $9x + 2y - 15 = 0$. Halla la ecuación de esta hipérbola, si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

46. Halla la ecuación de la hipérbola que es tangente a las dos rectas $5x - 6y - 16 = 0$, $13x - 10y - 48 = 0$ si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

47. Se da la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y una tangente cualquiera de ella; P es el punto de intersección de la tangente y el eje Ox ; Q es la proyección del punto de contacto sobre el mismo eje. Demuestra que $OP \cdot OQ = a^2$

48. La recta $2x - y - 4 = 0$ es tangente a una hipérbola cuyos focos están en los puntos $F(-3,0)$ y $F(3,0)$. Halla la ecuación de la hipérbola.

49. Halla la ecuación de la cuerda de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ que pasa por el punto $A(1,-2)$ y es dividida en él por la mitad.

50. Dada la hipérbola $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{7} = 1$ halla la ecuación de la cuerda que pasa por el punto $a(3,-1)$ y se divide en él por la mitad.

51. Dada la parábola $y^2 = 20x$ halla la ecuación de la cuerda que pasa por el punto $A(2,5)$ y se divide en él por la mitad.

Más ejercicios de la unidad 5.

1. Encuentra la ecuación ordinaria de la parábola dado su vértice V y su foco F

a) $V(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$; $F(\sqrt{5}, \sqrt{2})$ b) $V(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $F(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

2. Encuentra la ecuación general de la parábola que cumple con lo siguiente

- a) Vértice $V(-3, 5)$; Foco $F(0, 5)$
- b) Vértice $V(4, -2/5)$; Foco $F(4, 2)$
- c) Vértice $V(-1, -3)$; Foco $F(-3, -3)$
- d) Vértice $V(-3, 2)$; Directriz $y = 2$
- e) Vértice $V(-1/2, 3)$; Directriz $y - 5 = 0$
- f) Vértice $V(2, -1/3)$; Directriz $y + 8 = 0$
- g) Directriz $x + 3 = 0$; Foco $(1, 0)$
- h) Directriz $x + 4 = 0$; Foco $(2, 0)$

3. En cada caso, encuentra la ecuación general de la parábola usando la información que se da:

- a) Vértice $V(-1, -2)$; eje vertical y pasa por $P(3, 6)$
- b) Vértice $V(0, 0)$; pasa por $(2, 4)$ y tiene su foco en el eje x .
- c) Vértice $V(0, 0)$; pasa por $(-1, 3)$ y tiene su foco en el eje y .
- d) Vértice $V(0, 0)$; $LR = 16$ y la parábola abre hacia arriba.
- e) Vértice $V(0, 0)$; la parábola abre hacia la izquierda y pasa por $P(-3, 4)$
- f) Vértice $V(0, 0)$; la parábola abre hacia abajo y pasa por el punto $P(2, -3)$
- g) Vértice $V(2, 3)$; el eje es paralelo al eje y y pasa por el punto $P(4, 5)$
- h) Vértice $V(-1, -2)$; eje vertical y pasa por el punto $P(3, 6)$
- i) Eje vertical y pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(-1, 4)$

4. Un reflector está diseñado de tal manera que la sección transversal que pasa por su eje es una parábola con su foco en la fuente de luz. Si el reflector mide 3 pies de ancho en la abertura y un pie de profundidad, encuentra el foco.
5. Una librería puede conseguir cierto libro a un precio de 30 pesos por libro. La librería lo ha estado ofreciendo a un precio de 150 pesos por ejemplar, y, a este precio, ha estado vendiendo 200 ejemplares por mes. La librería está planeando bajar su precio, para estimular las ventas, y estima que por cada peso de reducción del precio, se venderán 20 libros más por mes.
 - a) Expresa el beneficio mensual de la librería en la venta del libro como una función del precio del libro.
 - b) Traza la grafica.
 - c) Determina el precio que deberá ajustar la librería para lograr el máximo beneficio.
 - d) ¿Cuántos libros venderá para obtener el máximo beneficio?
 - e) ¿Cuál es el máximo beneficio?
6. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos datos se dan en cada caso. Después transforma esa ecuación ordinaria en ecuación general
 - a) $C(0, 0)$; eje menor sobre el eje x ; $a = 2/3$; $b = 1/2$
 - b) $C(0, 0)$; eje mayor sobre el eje y ; $a = 8/5$; $b = 1$
 - c) $C(0, 0)$; $V(3, 0)$; $B(0, 2)$
 - d) $C(0, 0)$; $V'(-5, 0)$; $B'(0, -3)$
 - e) $C(0, 0)$; eje menor sobre el eje y ; $c = 2$; $a = 4$
 - f) $C(0, 0)$; eje mayor sobre el eje y ; $c = 5$; $a = 6$
 - g) $C(0, 0)$; LR es paralelo al eje x ; $c = 2$; $b = 1$
 - h) $C(0, 0)$; LR es paralelo al eje y ; $c = 4$; $b = 3$
 - i) $C(0, 0)$; una directriz es paralelo al eje x ; $e = 1/2$ $c = 1$
 - j) $C(0, 0)$; una directriz es paralelo al eje y ; $e = 2/3$; $a = 3$
 - k) $C(0, 0)$; $V(5, 0)$; $F(3, 0)$
 - l) $C(0, 0)$; $B(0, 3)$; la curva pasa por $P(4, \sqrt{5})$
 - m) $C(0, 0)$; eje mayor sobre el eje x ; pasa por los puntos $P(4, 3)$ y $Q(6, 2)$
 - n) $C(0, 0)$; eje menor sobre el eje y ; pasa por los puntos $P(-3, 2\sqrt{3})$ y $Q(4, 4\sqrt{5/3})$
 - o) $C(4, 1)$; $F(1, -1)$; pasa por $P(8, 0)$
 - p) $C(1, 2)$; $F(6, 2)$; pasa por $P(4, 6)$
 - q) $L'R'$ es paralelo al eje y ; pasa por los puntos $A(5, 0)$; $B(3, -3)$; $C(-2, 2)$ y $D(0, 1)$
7. Las siguientes ecuaciones representan elipse. En cada caso hallar:
 - El centro C
 - Los focos F, F'
 - Los vértices V, V'
 - B, B'
 - $LR; L'R'$

- Ecuaciones de los ejes
- Ecuaciones de las directrices
- Dibujar elipse
- Excentricidad

- a) $x^2/25 + y^2/9 = 1$
 b) $y^2/25 + x^2/9 = 1$
 c) $x^2/169 + y^2/144 = 1$
 d) $x^2/49 + y^2/25 = 1$
 e) $y^2/9 + x^2/4 = 1$

8. Encuentra la ecuación ordinaria de la hipérbola cuyos datos se dan. Después, transforma esa ecuación ordinaria en ecuación general:

- a) $C(0, 0)$; $VV' = 6$, está sobre el eje x ; pasa por $P(5, 3)$
 b) $C(0, 0)$; $BB' = 10$, está sobre el eje y ; pasa por $(2, 5)$
 c) $C(0, 0)$; $F(6, 0)$; el eje transversal mide 8
 d) $C(0, 0)$; $F(0, -3)$; el eje transversal mide 4
 e) $C(2, 0)$; $V(6, 0)$; $F(10, 0)$
 f) $C(-2, 3)$; $V(-2, 7)$; $F(-2, 10)$
 g) $C(0, 0)$; $LR = 20$; $V(4, 0)$
 h) $C(0, 0)$; $LR = 10$; $V(0, -5)$
 i) $C(0, 0)$; eje transversal horizontal; pasa por $P(3, -2)$ y $Q(7, 6)$

9. En cada caso, determina si la ecuación representa una hipérbola o dos rectas que se cortan. Si son dos rectas, escribe las ecuaciones; si es una hipérbola encuentra lo mismo que en el ejercicio anterior.

- a) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$
 b) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
 c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y - 27 = 0$
 d) $4y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$
 e) $3y^2 + 6y - x^2 + 2x + 11 = 0$

Unidad 6

La ecuación general de segundo grado

1. En cada caso, escribe la nueva ecuación que resulta cuando el origen se traslada al punto O' dado. Escribe el nombre de cada curva.

- a) $2x + y - 6 = 0$; $O'(-2, 2)$ c) $x^2 - 6x - 12y - 51 = 0$; $O'(3, -5)$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$; O' (1, -4) d) $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$; O' (2, -3)

2. Para cada ecuación, encuentra el punto al que debe trasladarse el origen, de manera que la ecuación transformada no tenga términos de primer grado. Escribe la nueva ecuación; en el caso de las parábolas elimina un término de primer grado y el término independiente.

a) $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$

d) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$

b) $y^2 - 4y + 8x - 28 = 0$

e) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$

c) $x^2 + 4x + 16y + 4 = 0$

f) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

3. Dada la ecuación $xy = 4$, gira los ejes un ángulo de 45° y halla la nueva ecuación.
4. Realizando una rotación y después una traslación de ejes reduce la ecuación $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$ de manera que queden únicamente los términos cuadráticos y el término independiente.
5. ¿En qué ángulo deben rotarse los ejes para que en la ecuación $73x^2 - 72xy + 52y^2 + 380x - 160y + 400 = 0$ desaparezca el término xy ?
6. Encuentra el tipo al que pertenece cada una de las siguientes curvas, considerando el valor del discriminante:
- a) $x^2 - 2xy + y^2 + 3x = 0$
- b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 = 0$
- c) $x^2 - y^2 + 4 = 0$
- d) $4x^2 - 3xy + y^2 + 13 = 0$
- e) $41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168$
- f) $2xy - x + y - 3 = 0$

Unidad 7

Trayectorias curvilíneas y ecuaciones paramétricas

1. En cada caso elimina el parámetro y obtén la ecuación rectangular correspondiente. Después traza la gráfica.

- a) $x = 1 + t^2$; $y = 1 + t$ e) $x = \tan \theta$; $y = \sec \theta$
 b) $x = 2 + t^2$; $y = 3 + t$ f) $x = 2 + \tan \theta$; $y = \sec \theta - 1$
 c) $x = 5 \cos \theta$; $y = 5 \sin \theta$ g) $x = -2 - 2 \sin \theta$; $y = 3 + 2 \cos \theta$
 d) $x = 4 \cos \theta$; $y = 4 \sin \theta$ h) $x = 3 + \sin \theta$; $y = -4 + 3 \cos \theta$

2. Elimina el parámetro y halla la ecuación rectangular:

- a) $x = t + 1/t$; $y = t - 1/t$ d) $x = 6t^2/(1 + t^3)$; $y = 6t^2/(1 + t^3)$
 b) $x = t^2 + 2$; $y = t^3 - 1$ e) $x = a \cos^3 \theta$; $y = a \sin^3 \theta$
 c) $x = 1/(1+t)$; $y = 1/(1+t^2)$ f) $x = b \cot(t/2)$; $y = (a^2/2b) \operatorname{sen} t$

3. Halla el ángulo con el que se debe lanzar un proyectil a una velocidad de 400 metros por segundo para que su alcance sea de 12,000 metros. También halla la duración de la trayectoria.

4. Una escalera de 4 metros de longitud, está apoyada en la pared de un edificio. Si la escalera se desliza, halla la ecuación del lugar geométrico que describe el punto que está a 1 metro del extremo inferior de la escalera.

5. Un segmento AB que pasa por el punto C(2,1), tiene sus extremos A y B en los ejes de las "x" y de las "y", respectivamente. Siendo P(x,y) el punto medio de AB, exprésese "x" y "y" en función del ángulo $\theta = \angle OAB$. Eliminando "θ", determínese la ecuación rectangular de la curva descrita por P, al girar AB alrededor de C.

6. Hallar las ecuaciones paramétricas de la parábola $y^2 = 4x$ empleando la razón

$$t = \frac{y}{x} \text{ como parámetro.}$$

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ utilizando el parámetro "t" que se define por la ecuación $x = a \cos t$

8. Hallar las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ utilizando el parámetro "t" que se define por la ecuación $x = a \sec t$

9. Hallar las ecuaciones paramétricas de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ utilizando el parámetro "t" que se define por la ecuación $x = a \operatorname{sen}^3 t$

$$\text{Sol. } x = a \operatorname{sen}^3 t, y = a \cos^3 t$$

10. Hallar las ecuaciones paramétricas de la hoja de descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ empleando la razón $\frac{y}{x} = t$ como parámetro.

$$\text{Sol. } x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Unidad 8

Coordenadas y ecuaciones polares.

1. Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, halla su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de las abscisas y que el polo está:
 - a) en el foco izquierdo de la elipse
 - b) en el foco derecho.

2. Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, halla la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de las abscisas y que el polo está:
 - a) en el foco izquierdo de la hipérbola;
 - b) en el foco derecho.

3. Determina las líneas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

$$a)r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos q}, \quad b)r = \frac{6}{1 - \cos q}, \quad c)r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos q},$$

$$d)r = \frac{12}{2 - \cos q}, \quad e)r = \frac{5}{3 - 4\cos q}, \quad f)r = \frac{1}{3 - 3\cos q}$$

4. Verifica que la ecuación $r = \frac{18}{4 - 5\cos q}$ determina la rama derecha de la hipérbola y halla sus semiejes.
5. Verifica que la ecuación $r = \frac{16}{3 - 5\cos q}$ determina la rama derecha de una hipérbola y halla las ecuaciones de, las directrices y de las asíntotas de esta hipérbola.
6. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos puntos dados F (-c, 0) y F (c, 0) es una cantidad constante, igual a a^2 . Este lugar geométrico de puntos se llama óvalo de Cassini.
7. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos puntos dados F (-a, 0) y F (a, 0) es una cantidad constante igual a

- a^2 . Este lugar geométrico de puntos se llama lemniscata. Halla también la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares, haciendo coincidir el eje polar con el semieje positivo Ox y el polo con el origen de coordenadas.
8. Se da la recta $x = a$ ($a > 0$) y una circunferencia de diámetro a que pasa por el origen de coordenadas O y es tangente a la recta dada. Desde el punto O se ha trazado un rayo que corta a la circunferencia en el punto A y a la recta dada en el punto B . Desde los puntos A y B se han trazado rectas paralelas a los ejes Oy y Ox , respectivamente. Al girar el rayo, el punto M de intersección de estas rectas, describe una línea llamada curva de Agnesi. Halla su ecuación.

Lecturas

5. Lecturas

Introducción

En este material se cuenta con algunas lecturas sobre temas de matemáticas. No se trata de un material de relleno, simplemente para introducir o motivar el estudio de ciertos temas. La comprensión de la matemática no se limita al conocimiento y adquisición de soltura en el uso de ciertos procedimientos, principalmente algebraicos. También incluye la discusión de ideas y conceptos.

La lectura te exige un esfuerzo que debes realizar si quieres lograr comprender su significado. Por ejemplo, la expresión “yo sólo sé que no sé nada” es atribuida a Sócrates. Sin embargo, en la *Apología de Sócrates* lo que se dice es “yo sólo sé que lo que sé es nada”. ¿Son equivalentes ambas expresiones? ¿Puedes explicar sus diferencias de significado?

Es posible que tengas compañeros que digan que ya entendieron algún tema de matemáticas, digamos ecuaciones de segundo grado, de manera que si les dan una ecuación no tienen dificultad para resolverla, pero que si de lo que se trata es leer un texto y a partir de él plantear una ecuación que deben resolver para responder lo que se les pregunta, entonces no pueden hacerlo, pues no entienden cómo se puede saber la ecuación que sirve para lo que dice el texto. Aquí se tiene un problema de comprensión de lectura y no porque el alumno no pueda darse una idea de lo que dice el texto, sino porque él mismo se bloquea y no sabe leer. En este *Libro* un problema se inicia con un texto y lo primero que debes hacer cuando te enfrentes a uno es leer el enunciado y buscar darle un sentido y significado coherente a la situación planteada.

No se trata de hacer complicada una lectura. Pero es que la comprensión de la lectura no es una actividad sencilla. Cuando decimos que una lectura nos permite descansar, hacer una pausa de nuestras actividades o deberes cotidianos, relajarnos, no es porque la lectura sea una actividad sin chiste y que aprende cualquier niño en los primeros años de primaria al reconocer las letras del alfabeto y cómo deben pronunciarse. Si nos sentimos bien luego de leer es porque nos interesa el tema que estamos leyendo y ya sabes que cuando realizamos alguna actividad que nos gusta, no nos pesa tanto el trabajo que debemos hacer para ello.

Para leer un libro de matemáticas necesitas al menos de lápiz y papel a un lado para realizar anotaciones, cálculos, dibujar figuras, o representaciones de lo que se está estudiando en el libro. Para leer un artículo o ensayo, es recomendable tener a la mano un diccionario para consultar con facilidad las palabras de las que se desconoce su significado. Ser un buen lector es una habilidad que desarrollamos poco a poco.

Cuando has leído un artículo y dices que lo has comprendido, es porque eres capaz de señalar sus ideas principales sin recurrir a la simple cita textual y cuando puedes identificar tus acuerdos y desacuerdos con el autor del texto.

Discutir una lectura también permite desarrollar nuestra capacidad de comunicación y argumentación. No basta decir que ya entendimos algo; si no somos capaces de expresar y comunicar a otros esta comprensión no logramos el principio básico de una discusión: se logra convencer a los otros a partir de la elaboración y exposición de argumentos coherentes y no por hablar más tiempo, más fuerte o por ocupar un puesto más alto que los otros.

Debemos saber comunicar nuestras ideas, pero también escuchar cuidadosamente los argumentos de otros, tratando de entender lo que nos están diciendo, reflexionar en los argumentos que nos presentan y aceptarlos si nos parecen convincentes.

La lectura de un artículo y luego la discusión del mismo nos permite reflexionar el tema tratado y enriquecer la comprensión del mismo. La lectura es una actividad que realizamos constantemente, en los periódicos, en el cine, en la televisión, en internet y en los mensajes que recibimos de estos medios tan diversos siempre hay una dimensión matemática que no podemos ignorar. Si algo de lo que lees llama tu atención por la importancia que las matemáticas tienen en su interpretación, ya sea un fragmento de película o de novela, una noticia o un reportaje, puedes elaborar un guión y organizar y conducir una discusión en la clase.

Lecturas

1. Geometría Analítica: ¿qué es? y ¿por qué se estudia? del SMSG

Capítulo 1 del libro Geometría Analítica del School Mathematics Study Group (SMSG), 1967. Stanford University.

La geometría analítica no se limita al estudio de las rectas y las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) como podría creerse al leer los textos clásicos. La geometría analítica permite describir los espacios a través del álgebra: curvas y superficies armoniosas y complejas tienen una expresión sintética en su ecuación. Es esta representación gráfica la belleza oculta de las expresiones algebraicas.

¿Qué es la geometría analítica?

La geometría analítica se ha estudiado sistemáticamente durante más de dos mil años. Los Elementos de Euclides, que se escribieron alrededor del año 300 antes de Cristo, constituyen, quizás, el texto de matemáticas de mayor influencia jamás publicado. Sin duda alguna, se pueden encontrar muchos vestigios de esta obra en el texto usado en la escuela secundaria.

Hasta el siglo XVII, la geometría se estudiaba mediante lo que se llamaba método sintético. Los postulados trataban con nociones geométricas tales como puntos, rectas y ángulos, y se hacía muy poco o ningún uso de los números. En los Elementos, por ejemplo, los segmentos rectilíneos no tienen longitudes.

Más tarde, a comienzos del siglo XVII, se realizó el mayor avance en geometría desde la época de Euclides. No se debió a la obra de un solo hombre, pues esto rara vez sucede. Más bien, ocurrió cuando el “clima intelectual” fue el adecuado. Sin embargo, hay un nombre que está tan universalmente asociado con la nueva idea de la geometría que ciertamente debe conocerse. Es el de René Descartes, un matemático y filósofo francés que vivió entre 1596 y 1650. La novedad esencial en la nueva geometría consistía en el uso de métodos algebraicos para resolver problemas geométricos. Se combinaban así dos disciplinas que hasta entonces habían permanecido casi independientes.

Se establece el nexo entre geometría y álgebra mediante los sistemas de coordenadas. En esencia, un sistema de coordenadas es una correspondencia entre los puntos de algún ‘espacio’ y ciertos conjuntos ordenados de números. (Usamos comillas, porque el espacio puede ser una curva, o la superficie de una esfera, o algún otro conjunto de puntos que habitualmente no se considera como espacio.) Ya el lector está familiarizado con varios sistemas de coordenadas, algunos de ellos estudiados en cursos de matemáticas más elementales, otros en asignaturas distintas, tales como la geografía. En el álgebra elemental, se han introducido sistemas de coordenadas en el plano, trazando dos rectas (ejes) perpendiculares entre sí, eligiendo un sentido positivo en cada una de ellas y una unidad de longitud común a ambas, y asociando con cada punto el par ordenado de números reales que representan las distancias orientadas desde los dos ejes al punto. La localización de un punto sobre la superficie de la Tierra se hace a menudo en términos de la longitud y la latitud. Los artilleros a veces localizan un blanco, sabiendo a qué distancia está y en qué

dirección con respecto a una dirección arbitrariamente fijada mediante un puesto de referencia. Esto es lo que se llama un sistema de coordenadas polares en el plano.

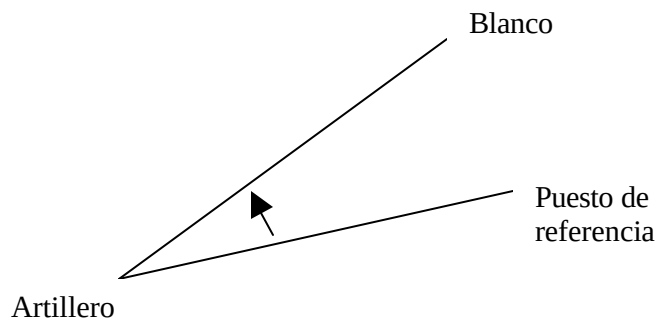


Figura 1-1

Un punto P sobre un cilindro recto circular puede situarse mediante la distancia orientada z y la medida del ángulo θ , como se muestra en la figura 1-2

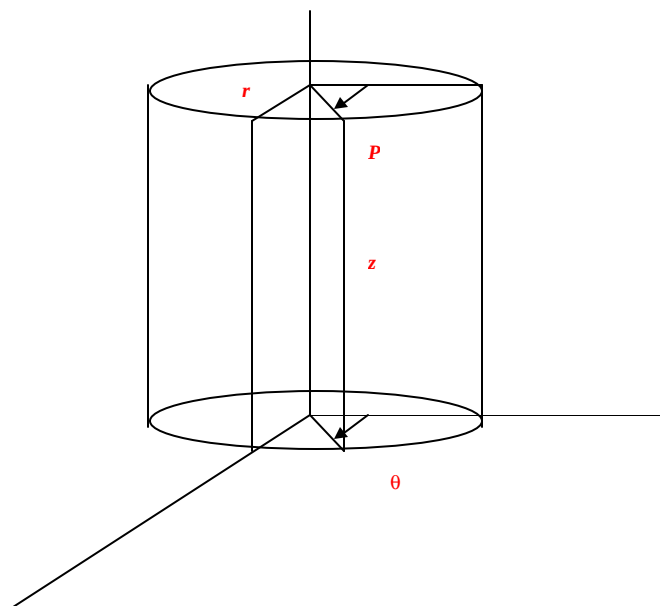


Figura 1-2

Si, en lugar de un cilindro recto circular, consideráramos todos los cilindros con el mismo eje, podríamos localizar cualquier punto del espacio, indicando el radio r del cilindro sobre el cual está el punto y sus coordenadas z y θ sobre el cilindro. El resultado es lo que se llama un sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio.

Una mosca sobre una rosquilla (un punto sobre una superficie anular o toro) puede ser localizada mediante las medidas (en grados, radianes, o cualquier otra unidad conveniente) de los ángulos ϕ y θ que se indican en la siguiente figura:

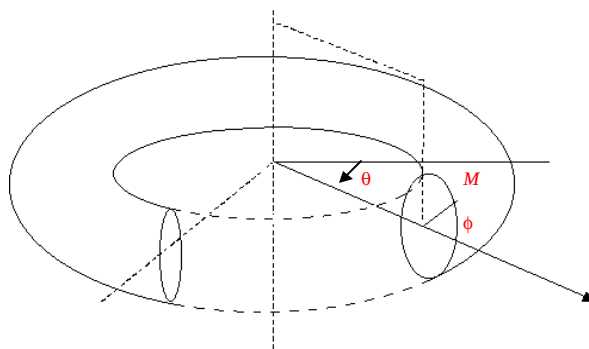


Figura 1-3

La posición de un satélite artificial en un cierto instante puede determinarse, dado su distancia vertical desde la superficie (o desde el centro) de la Tierra y la latitud y longitud del punto de la superficie de la Tierra que está directamente “debajo” del satélite.

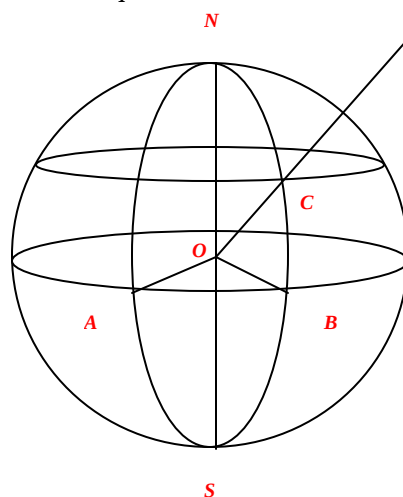


Figura 1-4

Así, se obtiene lo que se llama un sistema de coordenadas esféricas en el espacio. Se podría establecer un sistema de coordenadas incluso para un “espacio” que es bastante irregular. Podemos observar que la dirección de una casa, tal como habitualmente se da, es un conjunto de coordenadas con las que localizamos un lugar particular, la casa, con respecto a las calles y avenidas de la ciudad en que se vive. Estas calles y avenidas, que no son necesariamente rectas, son las “líneas coordenadas”, y los números de las casas indican, de manera razonable, los distintos lugares a lo largo de esas líneas.

Una vez establecido el sistema de coordenadas, pueden representarse conjuntos interesantes de puntos mediante condiciones adecuadas sobre sus coordenadas. La ecuación

$$2x - y + 4 = 0$$

representa la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (2,8), cuando usamos coordenadas rectangulares. La desigualdad

$$x^2 + (y - 2)^2 < 9$$

representa el conjunto de puntos cuya distancia al punto $(0, 2)$ no es mayor que 3 unidades, es decir, representa el interior del círculo de radio 3 y centro $(0, 2)$. La ecuación

$$x^2 - y^2 = 0$$

representa las dos rectas que pasan por el origen y forman ángulos de 45° y 135° con el eje de las abscisas.

Mediante los sistemas de coordenadas, podemos aritmetizar la geometría. Los problemas sobre figuras geométricas se remplazan por problemas sobre números, funciones, ecuaciones, desigualdades, etc. Podemos, así, echar mano del extenso cuerpo de conocimientos del álgebra, la trigonometría y el cálculo infinitesimal, que ha sido grandemente desarrollado desde el siglo XIII (En este texto, no utilizaremos el cálculo infinitesimal, pero si alguna vez lo estudia el lector, verá que en algunos asuntos tratados aquí, habría resultado útil).

La definición de geometría analítica que hemos dado es del tipo de las que se encuentran en los diccionarios más bien que en el uso corriente de las matemáticas. No dice cómo se empleará un término técnico en el resto de este libro, sino cómo se utiliza de ordinario una frase no técnica. De acuerdo con el análisis anterior, tanto la materia como los métodos de este libro son bastante familiares. Hasta se han empleado ya en los cursos más elementales. Por ejemplo, se sabe que (en un plano) la gráfica de una ecuación de la forma

$$(1) \quad ax + by + c = 0$$

es una recta, y que el problema de determinar la intersección de dos rectas en el plano puede resolverse, obteniendo la resolución de un sistema de dos ecuaciones tales como (1). Se sabe también, que el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está en esa recta (lugar geométrico que se llama parábola) tiene una ecuación de la forma

$$y^2 = 4cx,$$

si se escoge convenientemente el sistema de coordenadas. En este libro, nos ocuparemos de muchos de estos problemas, y al final, se tendrá una idea del alcance del nuevo método que Descartes y sus contemporáneos introdujeron en la geometría.

¿Por qué se estudia la geometría analítica?

Una de las razones más importantes para el estudio de la geometría analítica es la potencia de sus métodos. Ciertos problemas pueden resolverse de una manera más rápida, directa y simple mediante los métodos analíticos. Esto es cierto, no solamente para los problemas de la geometría y de otras ramas de las matemáticas, sino también para una amplia variedad de aplicaciones a la estadística, la física, la ingeniería y otros campos científicos y técnicos.

El uso de métodos algebraicos para resolver problemas geométricos permite generalizaciones fáciles. Un resultado que se obtiene para una o dos dimensiones puede a menudo generalizarse inmediatamente a tres o más dimensiones. A veces resulta tan fácil demostrar una relación en el espacio de n dimensiones como lo sería en el espacio de dos o tres dimensiones. En efecto, gran parte de lo que se hace para dimensiones mayores que tres es esencialmente álgebra con terminología geométrica.

La geometría analítica relaciona entre sí y aplica en un contexto nuevo e interesante lo que se ha aprendido sobre sistemas de números, álgebra, geometría y trigonometría. Esto

conducirá al dominio de las matemáticas estudiadas previamente. Cuando se estudie este curso habrá muchas ocasiones de utilizar conocimientos y métodos matemáticos familiares. También, se aprenderán nuevos métodos. Algunos de estos podrán parecer al principio incómodos o difíciles en comparación con los métodos utilizados antes. Debe tenerse siempre presente que lo que se hace es aprender métodos y la manera como aplicarlos.

Al estudiante, a veces, se le pedirá que emplee cierto método para llegar a dominarlo. Los problemas reales, sean de matemáticas, de ciencias experimentales o industriales, no vienen provistos de formulación matemática y de un método prescrito. Al final de este curso, se tendrá una gran variedad de recursos matemáticos más potentes que los anteriores. Se deberá estar en condiciones de elegir métodos eficaces para abordar problemas.

Así, pues, otra razón importante para estudiar la geometría analítica es la utilidad que prestará en cursos futuros, no solamente en las matemáticas, sino también en la física, la estadística, la ingeniería y las ciencias en general.

Existe una tendencia muy común a combinar la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Cuando esto ocurre, se pierde mucho de lo propiamente valioso de la geometría analítica. Debido a que un curso de cálculo y geometría analítica es, en primer lugar, un curso de cálculo, se conserva de la geometría analítica sólo aquellas partes que son aplicables al cálculo. Al estudiar un curso independiente de geometría analítica, hay mejor oportunidad de comprender la coherencia del tema, la diversidad de los métodos y la amplia variedad de problemas a los que puede aplicarse.

Una de las razones más importantes para estudiar la geometría analítica es la de lograr entender bien la relación que existe entre el álgebra y la geometría. El álgebra contribuye a la geometría analítica, suministrando un lenguaje escrito para las relaciones, un método que sirve no sólo para demostrar resultados conocidos, sino también para obtener resultados antes desconocidos. La geometría brinda al álgebra una manera de representar las relaciones algebraicas. Esta representación intuitiva ayuda a comprender el análisis algebraico. En la representación constituida por un sistema de coordenadas, se hace geometría al hacer álgebra, y se ve el álgebra a través de la geometría. El álgebra y la geometría están entremezcladas en la geometría analítica; una refuerza y aclara a la otra.

2. ¿Por qué las demostraciones? de George Polya

Como plantear y resolver problemas de George Polya, Editorial Trillas, México, 1987.

Se cuenta de Newton una anécdota clásica. Joven estudiante, comenzó el estudio de la geometría, como era costumbre en su tiempo, por la lectura de los Elementos de Euclides. Leyó los teoremas, constató su exactitud y omitió las demostraciones, preguntándose por qué se tomaban tantas molestias en demostrar verdades tan evidentes. Años más tarde, sin embargo, cambió de parecer y fue un admirador de Euclides.

Auténtica o no, esta anécdota nos lleva a la pregunta siguiente: ¿por qué aprender o enseñar las demostraciones? ¿Qué vale más, nada demostrar, demostrarlo todo o demostrar en parte? Y si sólo se dan algunas demostraciones, ¿cómo escogerlas?

1. *Demostraciones completas.* Para ciertos lógicos sólo existen las demostraciones completas. Las así denominadas no deben tener ninguna laguna, ninguna falla, ninguna

incertidumbre de ninguna especie; de lo contrario, no es una demostración. ¿Existen, en la vida diaria, en el proceso de los tribunales, en la física, demostraciones completas según dicha definición? En realidad no. Es, pues, difícil de comprender cómo podríamos adquirir la noción de una demostración tan rigurosamente concebida.

Podemos decir, exagerando un poco, que tal idea es debida a un hombre y a un libro: Euclides y sus Elementos. En todo caso, incluso hoy en día, el estudio de los elementos de la geometría plana es el que suministra la mejor oportunidad de adquirir la noción de la demostración rigurosa.

Tomemos como ejemplo la demostración del teorema: En *todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a 180°* .^{*} La figura 20, que es parte integrante de nuestro equipaje intelectual, necesita poca explicación.

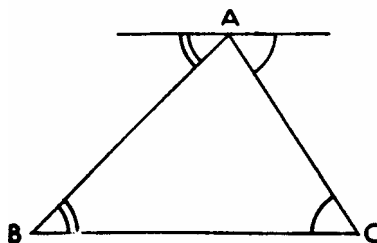


FIG. 20

Se ha trazado por el vértice A una paralela al lado BC. Los ángulos en B y C son respectivamente iguales a los dos ángulos exteriores formados en A, en virtud de la igualdad de los ángulos alternos internos comprendidos entre paralelas. Así pues, los tres ángulos del triángulo son iguales a los tres ángulos que tienen por vértice común el vértice A y forman un ángulo llano equivalente a dos ángulos rectos. El teorema queda así demostrado.

Si un alumno termina sus estudios de matemáticas sin haber comprendido realmente las demostraciones de este tipo, estará en su derecho al recriminar a sus profesores. De hecho, debemos clasificar las cosas según su importancia. Si dejamos que un alumno ignore tal o cual hecho particular de geometría, no importa gran cosa, dado que probablemente no se tenga que valer nunca de ello; pero si descuidamos el enseñarle las demostraciones geométricas, ignorará los mejores y más sencillos ejemplos de la demostración exacta y perderá la mejor ocasión de su vida para adquirir la noción de lo que es un razonamiento riguroso. Falto de esta noción, adolecerá siempre de la falta de un punto de comparación para juzgar el valor de las "demostraciones" que le propondrá la vida moderna.

En suma, si la educación tiende a dar al alumno la noción de la demostración intuitiva y del razonamiento lógico, deberá reservar un lugar a las demostraciones geométricas.

2. *Sistema lógico.* La geometría, tal como se presenta en los Elementos de Euclides, no es un simple conjunto de hechos, sino un sistema lógico. Los axiomas, las definiciones y proposiciones no están agrupadas al azar, sino dispuestas en un orden perfecto. Cada proposición ocupa un lugar de tal suerte que resulta de los axiomas, de las definiciones y de las proposiciones precedentes. Se puede considerar esta disposición como el principal logro de Euclides y dicho sistema lógico como el mérito esencial de sus Elementos.

^{*} Es la proposición 32 del Libro I de los Elementos de Euclides. La demostración que sigue no es de Euclides, pero era conocida por los griegos.

La geometría de Euclides no es solamente un sistema lógico, es el primero y el más grande ejemplo de este género de sistema que otras ciencias han tratado -y tratan todavía- de imitar. En cuanto a las que están más alejadas de la geometría, como la psicología y la jurisprudencia, ¿incluso ellas deben plegarse a dicha lógica rígida? La pregunta es discutible, pero nadie puede participar en el debate competentemente sin estar familiarizado con el sistema euclideo.

Ahora bien, el sistema descansa sobre demostraciones. Cada proposición está ligada por una demostración a los axiomas, a las proposiciones, a las definiciones que la preceden. Si no hemos asimilado esta manera de demostración, no podemos comprender la esencia misma del sistema.

En resumen, si la educación tiende a dar al alumno la noción del sistema lógico, debe reservar un lugar a las demostraciones geométricas.

3. *Sistema mnemotécnico.* Es creencia del autor que las nociones de la demostración intuitiva, del razonamiento riguroso, del sistema lógico son recomendables en la mayoría de los casos. Hay, sin embargo, casos en los cuales el estudio de dichas nociones no se considera absolutamente necesario, sea por falta de tiempo sea por alguna otra razón. Pero, aun entonces, puede ser deseable conocer las demostraciones.

Estas suministran la demostración intrínseca, permiten al sistema lógico formar un todo, y nos ayudan a recordar las diversas componentes de este todo. Tomemos el ejemplo tratado aquí antes (Fig. 20). Dicha figura pone en evidencia el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180° , relacionando este hecho con el de la igualdad de los ángulos alternos internos. Los hechos relacionados entre sí son más interesantes y más fáciles de retener que los hechos aislados. Así pues, la figura fija en nuestra mente dos proposiciones geométricas relacionadas y, finalmente, la figura y las proposiciones acaban formando parte de nuestro equipaje intelectual.

Vayamos ahora al caso en que no se pretende adquirir ideas generales, sino fijar solamente ciertos puntos. Incluso en casos de ese tipo, los hechos deben ser presentados unos con relación a otros, en una especie de síntesis, dado que es más difícil retener detalles aislados, pues se olvidan fácilmente. Cualquiera que sea la relación que una los hechos de modo sencillo, natural y durable, sed bienvenida. Tal sistema no necesita basarse en la lógica, pero debe solamente concebirse de un modo que ayude eficazmente a la memoria; debe ser *mnemotécnico*. Añadamos que, incluso en un sistema puramente mnemotécnico, las demostraciones pueden ser útiles, sobre todo si son sencillas. Por ejemplo, el alumno debe aprender el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo y el de los ángulos alternos internos. ¿Existe algún procedimiento más simple, más natural o más eficaz que el de la figura 20, para fijar estos dos hechos?

Resumiendo, aun sin dar particular importancia a las ideas lógicas generales, las demostraciones pueden ser útiles tanto como el procedimiento mnemotécnico.

4. *Sistema de recetario de cocina.* Hemos expuesto las ventajas de las demostraciones, pero nos hemos cuidado bien de no recomendarlas como una panacea universal. Existen, en efecto, casos en los que es prácticamente imposible utilizarlas, por ejemplo, el de la enseñanza del cálculo diferencial e integral a los alumnos de ingeniería.

Para presentarse con un rigor conforme a las exigencias modernas, el cálculo infinitesimal exige demostraciones relativamente difíciles y sutiles ("demostraciones epsilon"). Sin embargo, los ingenieros lo estudian en vista de su aplicación y no tienen ni suficiente tiempo ni suficiente práctica ni suficiente interés para debatirse en demostraciones largas o

apreciar sutilezas. En tales casos se tiende a suprimir todas las demostraciones; pero, haciendo esto, se reduce el cálculo infinitesimal al nivel de un recetario de cocina.

El libro de cocina da una descripción detallada de los ingredientes y del procedimiento, pero no da razones ni demostraciones que fundamenten sus indicaciones o recetas; la demostración del "pudding" reside en su sabor. El libro de cocina responde desde luego a la perfección a su propósito; no necesita apoyarse sobre ningún sistema lógico o mnemotécnico dado que sus recetas se escriben o se imprimen y no están destinadas a aprenderse de memoria.

Otra suerte corre el autor de un texto de cálculo infinitesimal o el profesor universitario; ninguno de ellos logrará su propósito si siguen de cerca el sistema del libro de cocina. Si expone métodos sin demostrar, sin motivar, dichos métodos no serán comprendidos; si da reglas sin explicar, sin relaciones entre ellas, se olvidarán rápidamente. Las matemáticas no se pueden demostrar a la manera de un "pudding"; si se excluyen todas las formas de razonamiento, un curso de cálculo infinitesimal se convertirá en una especie de inventario incoherente, sin la menor posibilidad de suministrar información alguna.

5. *Demostraciones incompletas*, El mejor modo de resolver el dilema que se plantea entre la demostración demasiado larga y el libro de cocina podría consistir en utilizar -sin exceso- la demostración incompleta.

Para un lógico estricto, una demostración incompleta no es demostración. Y claro está, las demostraciones incompletas deben distinguirse cuidadosamente de las completas; confundirlas está mal, hacer pasar una por otra es peor. Es penoso ver al autor de un texto presentar una demostración incompleta de manera ambigua, vacilando visiblemente entre la vergüenza y el deseo de hacer creer que la demostración es completa. Las demostraciones incompletas, sin embargo, pueden ser útiles cuando se las emplea adecuadamente y con buen gusto; tienen por objeto no el sustituir las demostraciones completas -lo cual no es posible- sino el dar a una exposición interés y coherencia.

Ejemplo 1. Una ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n raíces. Esta proposición, llamada por Gauss el Teorema Fundamental del Álgebra, ha de presentarse con frecuencia a alumnos no preparados para comprender la demostración. Saben, sin embargo, que una ecuación de primer grado tiene una raíz y que una de segundo grado tiene dos. Por otra parte esa proposición comprende una parte fácil de demostrar: *ninguna ecuación de grado n tiene más de n raíces diferentes.*

¿Constituyen los hechos mencionados una demostración completa del Teorema Fundamental? De ningún modo. Bastan sin embargo, para presentarlo de un modo interesante y plausible y para fijarlo en la mente de los alumnos, lo que es esencial.

Ejemplo 2. La suma de dos ángulos formados por las aristas de un ángulo triedro es superior al tercero. Es evidente que el teorema se reduce a afirmar que *en un triángulo esférico la suma de dos lados es superior al tercero.* Hecha esta observación, pensamos naturalmente en la analogía entre el triángulo esférico y el triángulo rectilíneo. ¿Dichas observaciones constituyen una demostración? De ningún modo, pero nos ayudan a comprender el teorema propuesto y recordado.

El primer ejemplo presenta un interés histórico. Durante 250 años aproximadamente, los matemáticos creyeron en el Teorema Fundamental, sin conocer la demostración perfecta, de hecho sin mayores bases que las mencionadas aquí. El segundo ejemplo muestra que la ANALOGÍA es una fuente importante de hipótesis. En las matemáticas, como en las ciencias naturales y físicas, el descubrimiento nace a menudo de la observación, la analogía y la inducción. Esos medios, empleados con cautela para poner en pie un razonamiento

heurístico plausible, son particularmente del gusto del físico y del ingeniero. (Véase INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, 1, 2, 3.)

El papel y el interés de las demostraciones incompletas se explican en parte en nuestro estudio de la solución. Una cierta experiencia del modo de resolver los problemas muestra que la primera idea de una demostración es con frecuencia incompleta. La observación esencial, la relación principal, el germen de la demostración, pueden haberse encontrado, pero los detalles a menudo difíciles no vienen sino después. Algunos autores tienen el don de no presentar más que el germen de la demostración, la idea principal bajo la forma más simple e indicar la naturaleza de los detalles restantes. Tales demostraciones, pese a lo incompleto, pueden ser mucho más instructivas que una demostración presentada en todos sus detalles.

Resumamos: las demostraciones incompletas pueden servir de procedimiento mnemotécnico (pero, claro está, sin pretender sustituir a las demostraciones completas) cuando se busca una cierta coherencia de presentación y no un encadenamiento lógico riguroso. Es muy peligroso hacer elogios de las demostraciones incompletas. Se pueden evitar posibles abusos observando algunas reglas. En primer lugar, si la demostración es incompleta, hay que señalarlo en alguna parte, de un modo o de otro. Después, ningún autor o profesor tiene el derecho de presentar una demostración incompleta de un teorema si no conoce muy bien la demostración completa.

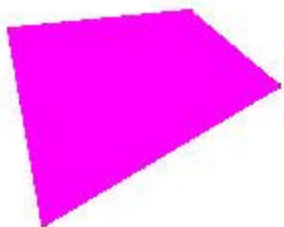
Por lo demás se puede confesar que no es fácil el presentar en forma elegante una demostración incompleta.

3. Carta de amor a un trapezoide de Claudi Alsina

Carta publicada en el Rincón Matemático 2000

http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/carta_de_amor_a_un_trapezoide.htm

Querido trapezoide:



Le sorprenderá que por primera vez alguien le haga una declaración de amor y ésta no provenga de una figura plana. Su pertinaz vivencia en el plano le ha mantenido siempre al margen de lo que ocurre por arriba o por abajo, enfrente o detrás. Digámoslo claramente: yo lo conocí hace años pero usted aún no se había enterado, hasta hoy, de mi presencia. Debo pues empezar por el principio y darle noticia de cómo fue nuestro primer encuentro.

Ocurrió una tarde de otoño lluviosa. Una de estas tardes de octubre en que llueve a cántaros, los cristales de los colegios quedan humedecidos y los escolares sin recreo. Usted estaba quieto en una página avanzada de un libro grueso que era nuestra pesadilla continua. Me acuerdo aún perfectamente. Página 77, al final hacia la derecha, Fue al abrir esta

página, siguiendo la orden directa de la señorita Francisca, nuestra maestra, cuando lo vi por primera vez. Allí estaba usted entre los de su familia, un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un rombo, un romboide,... y ¡el trapezoide! Un perfil grueso delimitaba sus desiguales lados y sus extraños ángulos. La señorita Francisca se fue exaltando a medida que nos iba narrando las grandes virtudes de sus colegas cuadriláteros... que si igualdades laterales, que si paralelismos, que si ángulos, que si diagonales... y el rato fue pasando y la señorita seguía sin decir nada. Como las señoritas acostumbran a no explicar lo más interesante, a mí se me ocurrió preguntarle

- Señorita... ¿y el trapezoide?
- Éste -replicó la maestra- éste es el que no tiene nada
- ¿Nada de nada? - le repliqué
- Sí, nada de nada - me contestó

... y sonó el timbre. Quedé fascinado: usted era un pobre, muy pobre cuadrilátero. Estaba allí, tenía nombre, pero nada más. Por eso a la mañana siguiente volví a insistir en el tema a la señorita.

- Así debe ser muy fácil trabajar con los trapezoides -le dije - ya que como no tienen nada de nada no se podrá calcular tampoco nada de nada.
- ¡Al contrario! Estos son, los más difíciles de calcular. Ya lo verá cuando sea mayor.

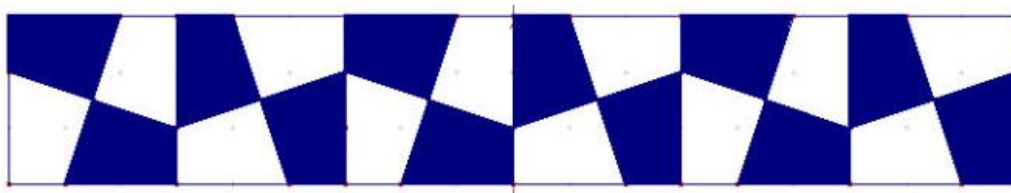
Durante aquella época yo creí intuir que matemáticas y cosas sexuales debían tener algo en común pues siempre se nos pedía esperar a ser mayores para “verlo”.

A usted ya no lo vi más, hasta que en Bachillerato don Ramiro nos obsequió con una fórmula muy larga para calcular su área. Esto me enfadó enormemente. Usted había pasado del “nada de nada” al “todo de todo”. A partir de entonces empecé a pronunciar su “oide” final con especial desprecio “¡trapez-OIDE!”.

Nuestro siguiente encuentro tuvo lugar en una calle. De pronto miro el pavimento y descubro con horror que le estoy pisando. Di un salto y me quedé mirando. ¡Que maravilla! Después de tantos años sobre mosaicos llenos de ángulos rectos allí estaba usted. El “nada de nada” era ahora una loseta. Dibujé aquel suelo y entonces marqué los puntos medios de sus lados y empecé a trazar rectas y una maravilla de paralelogramos nacieron enmarcando su repetición. La señorita Francisca tenía razón en lo difícil que es tratarlo pero no la tenía en le del “nada de nada”.

Y ahora al final de la declaración sólo me queda pedirle una cosa. Por favor no diga nunca a nadie que yo hice esta declaración. Guarde esto en el centro del paralelogramo inscrito que le acompaña. Yo guardaré su recuerdo, dibujándolo en todas las reuniones. Los amores imposibles al menos tienen la virtud de ser duraderos. Suyo.

Claudi Alsina.



4. Diálogos 1

Diálogos 1 de *Estudiar Matemáticas* de Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón, SEP, México, 1998.

Diálogos 1

Las matemáticas se aprenden y se enseñan pero también se crean y utilizan

Profesora.- Así que querías hablar del episodio de la Tienda de Matemáticas...

Estudiante.- Sí, eso es.

P.- Me parece un buen tema para empezar.

E.- Usted participó en la creación del Instituto Juan de Mairena, ¿no?

P.- Sí. Además formaba parte de los que apoyaban la idea de poner en marcha las Tiendas en el Instituto. Porque no sólo hay una Tienda de Matemáticas...

E.- Ya. También hay una de Idiomas y Lingüística.

P.- Por ejemplo.

E.- ¿Ya qué respondía la creación de las Tiendas? En principio, si lo he entendido bien, en las Tiendas no hay enseñanza ni aprendizaje...

P.- Parece que lo has entendido bien.

E.- Pero entonces ¿para qué crear este tipo de... de institución, en un centro docente?

P.- Antes de responder, permíteme una pregunta. Has acabado recientemente la carrera de Matemáticas, ¿verdad?

E.- Sí.

P.- ¿Y me podrías decir por qué has estudiado esta carrera?

E.- Porque me gustan las matemáticas.

P.- ¡Estupendo! ¡No abundan los "amantes" de las matemáticas! Pero, en realidad, cuando dices que te gustan las matemáticas, ¿quieres decir que te gusta *aprender* matemáticas?

E.- Sí, pero no es lo único. También me gusta enseñarlas.

P.- Perfecto. Si lo he entendido bien, lo que has hecho con las matemáticas ha sido aprenderlas para luego enseñarlas. ¿Ya estás trabajando?

E.- No, todavía no. Pero doy clases particulares.

P.- Ah, ya. Muy bien. Así que, según parece, las matemáticas son para ti algo que se aprende y también algo que se enseña.

E.- Sí, claro.

P.- Pues bien, sustituye ahora "matemáticas" por "fontanería". La fontanería es algo que se aprende y se enseña.

E.- Sí.

P.- Pero supongo que te das cuenta de que esta afirmación es incompleta, que le falta algo.

E.-...

P.- Socialmente. Falta algo.

E.-...

P.- Si la fontanería sólo fuera algo que se enseña y se aprende, ¿qué te parece que ocurriría?

E.- Lo siento pero me parece que no la sigo... No veo lo que quiere decir.

P.- Te lo voy a decir claramente. Si la fontanería sólo fuera algo que se enseña y que se aprende... ¡no habría fontaneros!

E.- Quiere usted decir que... ¡ah, ya lo entiendo! Sólo habría alumnos de fontanería y profesores de fontanería, pero no habría fontaneros. Sería algo así como un circuito cerrado.

P.- Eso es, exactamente. Si tuvieras una avería, no encontrarías a ningún fontanero. Habría gente que aprendería fontanería y gente que la enseñaría, pero no habría nadie para arreglar los grifos de tu cuarto de baño. ¿Entiendes lo que quiero decir?

E.- Creo que sí... Es verdad. Pero en nuestra sociedad no sólo hay profesores y alumnos de matemáticas. También hay matemáticos. Los matemáticos se corresponderían con los fontaneros, ¿no?

P.- Sí. En cierto sentido sí.

E.- Entonces lo que quiere usted decir es que yo no soy matemático.

P.- No, no es exactamente eso. Normalmente sólo se considera matemáticos a los que investigan en matemáticas, a los que crean matemáticas nuevas. Pero no es esa la cuestión. Consideremos las matemáticas que has aprendido. Porque has aprendido muchas matemáticas...

E.- ¿Muchas? No sé, algo...

P.- Lo bastante como para que, con las matemáticas que has aprendido, puedas resolver muchos de los problemas matemáticos que tienen los que no son matemáticos.

E.- ¿Como la profesora de biología, la de la tabla simétrica?

P.- Exactamente. Es un buen ejemplo. Porque seguro que tú puedes resolverle el problema a partir de las matemáticas que has aprendido, ¿no?

E.- Sí, sí, claro.

P.- Bueno, a lo que íbamos... ¿Has tenido alguna vez que resolver un problema de matemáticas para alguien de tu entorno? Me refiero a un problema que no haya propuesto un profesor de matemáticas, ni que haya sido pensado para aprender matemáticas o comprobar que se han aprendido correctamente. Como el caso de la tabla simétrica de la profesora de biología, por ejemplo.

E.- Pero en ese caso, ¿no habría aprendido nada al resolver el problema de la tabla!

P.- ¡Eso es lo que te decía! Sólo se te ocurre hacer matemáticas con el objetivo de aprender matemáticas. Y mañana, cuando seas profesor, sólo se te ocurrirá hacer matemáticas para enseñarlas, para que tus alumnos las aprendan.

E.- ¿Y no le parece suficiente?

P.- Para responderte, volveremos al principio, a lo de la fontanería. Imagina que estamos en una sociedad como la que hemos descrito antes, en la que sólo hay profesores y alumnos de fontanería, pero sin fontaneros. Supón además que alguien necesita un fontanero y recurre a un "estudiante avanzado" de fontanería. ¿Me sigues?

E.- Sí.

P.- Pues bien, supón ahora que este estudiante de fontanería se comportara como tú respecto de las matemáticas: examina el "problema" de fontanería y se percata de que es un problema muy simple, con el que no aprenderá nada que no sepa ya. Entonces, de una manera u otra, se negará a intervenir...

E.- ¡Creo que exagera un poco, Profesora! En el fondo, está usted diciendo que, para mí, las matemáticas sólo existen en la medida en que tengo que aprenderlas o enseñarlas. Y, además, lo que usted se imagina no es verdad. Si alguien me pidiera que le explicara alguna cuestión de matemáticas, no me negaría a hacerlo. ¡Con la condición, claro, de que yo mismo supiera hacerlo!

P.- Lo que acabas de decir muestra que aún no me entiendes bien. No se trata de *explicar*, no se trata de hacer de profesor. Se trata de resolver un problema y de comunicar la solución a la persona que lo necesita. Por ejemplo, no se trata de ayudar a la profesora de

biología a encontrar la fórmula $n(n+1)/2$. Se trata sólo de comunicársela y, si es necesario, de decirle cómo utilizarla.

E.- ¿Pero no sería mejor, para ella, que aprendiera a establecer la fórmula por sí misma?

P.- Si estuviera aprendiendo matemáticas, quizá sí, pero aquí lo que ella necesita es una fórmula. Es eso lo que pide. Y tú te comportas como un fontanero que, en lugar de arreglar el grifo de tu casa, se empeña en enseñarte cómo hacerlo tú solo. De hecho, padeces una enfermedad muy común entre la gente que no ha salido de la escuela...

E.- ¡¿Qué enfermedad?!

P.- La enfermedad didáctica. Consiste en reducirlo todo al aprender y al enseñar, olvidando que los conocimientos también sirven para *actuar*. En la sociedad, enseñar y aprender son sólo *medios* para que cierto número de personas adquieran los conocimientos necesarios para realizar ciertas actividades. La enfermedad didáctica consiste en creer que toda la sociedad es una escuela. Lo siento, pero todo el mundo no puede saberlo todo, cada uno de nosotros sólo puede dominar un pequeño número de conocimientos.

E.- Pues si es así, ¿por qué se obliga a los alumnos a aprender matemáticas?

P.- ¡Ah! ¡Esperaba esta pregunta! Aunque seguro que no la acabas de plantear porque te interese la respuesta, sino sólo para tener un argumento a tu favor. Por eso prefiero que volvamos a lo que te preguntaba al principio de todo, y que todavía no has contestado: ¿has tenido ya la ocasión de resolver un problema de matemáticas porque te lo encargaba o pedía alguien?

E.- Ahora mismo no lo recuerdo. Pero, a pesar de lo que usted pretende, si se presentara la ocasión seguro que lo haría gustoso. De todas formas, no creo que nunca nadie me lo haya pedido. .

P.- Pues mira, si alguna vez trabajas en el Instituto Juan de Mairena, tendrás la ocasión de hacerlo cuando te toque atender la Tienda de Matemáticas. Pero seguiremos hablando de todo ello el próximo día, porque hoy ya se nos ha hecho tarde.

E.- Muy bien. Muchas gracias, Profesora.

¿Qué significa "ser matemático"?

E.- Buenos días Profesora.

P.- Buenos días. ¿Cómo va todo?

E.- Bien, gracias. Pero...

P.- ¿Sí?

E.- Le he estado dando vueltas a lo de la enfermedad didáctica.

P.- ¿Y bien?

E.- Pues... me ha dejado un poco perplejo. Y, además, ha ocurrido algo... Al volver a casa, el otro día... ¡Es realmente increíble! Me llamó mi prima por teléfono... ¡Y resulta que me quería consultar sobre, un problema de matemáticas!

P.- ¿Ah sí? ¿A qué se dedica tu prima?

E.- Es correctora y trabaja para una editorial, pero no está contratada. Le mandan libros y otros textos a casa para que los corrija. Su problema es que tenía que hacer una factura de un trabajo que había realizado y quería cobrar por ello 45,000 ptas.

P.- y supongo que quería saber qué cantidad poner en la factura para que, al restarle el I.R.P.F., le quedaran 45,000 ptas., ¿no?

E.- No, no exactamente...

P.- ¿Ah no? ¿Entonces qué quería?

E.- Pues verás, alguien le había dicho que bastaba con dividir entre 0.85.

P.- ¿Y bien?

E.- A ella no le convencía demasiado, no entendía por qué. Quería que se lo explicara, que le dijera por qué había que dividir entre 0.85.

P.- Ya. O, mejor dicho, quería que le aseguraras que era eso lo que tenía que hacer. Quería estar segura para no tener sorpresas más tarde, para que no le pagaran menos. ¿Es eso?

E.- Sí, más o menos. De todas formas, se lo he explicado: para tener 45,000, hay que pedir x , tal que x menos el 15 % de x dé 45,000. Lo hemos escrito...

P.- ¿Pero no hablabais por teléfono?

E.- Sí, le he dicho que lo escribiera en un papel. Y enseguida ha visto que se trataba de una ecuación de primer grado: $x - 0.15x = 45,000$. ¡Y la ha resuelto ella sola!

P.- ¡Muy bien! ¿Qué estudios tiene tu prima?

E.- Es licenciada en filología. De letras, vaya.

P.- Luego, como ves, ¡no ha olvidado todo lo que aprendió en secundaria!

E.- Precisamente. ¡Lo hubiera podido comprobar sola! Incluso lo del 0.85...

P.- Hubiera podido, pero no pudo. Necesitaba ayuda. Necesitaba la ayuda de un matemático. Tú también habrás arreglado alguna vez un grifo de tu casa. Pero en algunos casos tienes que recurrir a un fontanero.

E.-...

P.- Y, al mismo tiempo, para que tengas que recurrir a un fontanero, debe haber un mínimo de dificultad, ¿no? O, por lo menos, tiene que ser importante que el trabajo se realice bien, que no sea una "chapuza". Como en el caso de tu prima: tenía la solución —bastaba con dividir entre 0.85—, ¡pero era importante que no hubiera ningún error!

E.- Sí, ya veo. Para mí no era un problema difícil...

P.- ¡Y, sin embargo, aceptaste resolverlo!

E.- Sí, sí, claro. Para mí no era difícil, pero para ella era muy importante.

P.- Exacto. Hoy has aprendido algo más sobre cómo funciona la sociedad. Te felicito.

E.- Gracias. Pero ese día mi prima necesitaba a un matemático, y usted insinuó la última vez que yo no era un matemático.

P.- ¡No! ¡Yo nunca he dicho eso! Tienes que prestar más atención a lo que decimos. ¡El trabajo que realizamos necesita un poco de rigor!

E.- Lo siento, lo siento... ¿Me podría entonces precisar lo que entiende por matemático? Es lo que no llego a ver con claridad.

P.- Pues mira, hemos hablado de los matemáticos que investigan en matemáticas.

E.- Sí.

P.- Éste es un sentido un tanto restrictivo de la palabra "matemático". Te voy a proponer otra definición. Cuando alguien consulta a otro sobre una cuestión de matemáticas... Digamos, cuando a una persona A, una persona B le consulta sobre algo de matemáticas, cuando B otorga su confianza a A sobre la validez de la respuesta, cuando A acepta el encargo de B y se compromete —no necesariamente de manera explícita— a garantizar la validez de su respuesta, entonces A es un matemático o una matemática. Mejor dicho, A es un matemático para B.

E.- O sea que, según su definición, ser matemático no es una propiedad sino una relación entre dos personas, ¿no?

P.- Exacto.

E.- Entonces, por ejemplo, cuando A es uno de los profesores de matemáticas de la Tienda que contesta a la profesora de biología, que es B, este profesor de matemáticas, José, es un matemático para B, la profesora de biología.

P.- Exacto. Y cuando tú, A, contestas a tu prima...

E.- Soy un matemático para ella. Pero un matemático que investiga en matemáticas sabe muchas más matemáticas que yo. E incluso que José. ¡Con su definición todo el mundo puede ser matemático!

P.- Si quieres, sí. Pero una persona dada sólo será matemática para ciertas otras personas. Un investigador en matemáticas quizá no considere que tú eres un matemático.

E.- Quieres decir... ¿La puedo tutear, Profesora?

P.- ¡Por supuesto!

E.- Quiere usted decir... ¡Perdón! Quieres decir que me va a mirar con un poco de desprecio, ¿no?

P.- No. Y si lo hiciera, sería simplemente porque entiende mal cómo funciona la sociedad. Tu prima no tiene por qué consultar a un matemático especialista para resolver su problema. Además de ser socialmente muy caro, sería sacar las cosas de quicio, como esas personas que van a ver a un médico especialista cuando tienen un simple resfriado.

E.- Sí, ya lo veo.

P.- Espera. Aún hay dos cuestiones por clarificar. Para empezar, decías que un investigador en matemáticas sabe más matemáticas que tú y que José. Es sin duda cierto, por lo menos es lo que suponemos. Pero, aunque sepa muchas matemáticas, no lo sabe todo. Ni él, ni el conjunto o de los investigadores en matemáticas de todo el mundo. Y si alguien le consultara sobre una cuestión que él no conociera, no habría ninguna diferencia entre consultárselo a él y consultárselo a José o a ti. ¡La persona que consulta se quedaría igualmente sin solución al problema!

E.- Sí. Dicho de otro modo, ser matemático es relativo. Uno podrá ser matemático para ciertas personas y no para otras.

P.- Eso mismo. Y la ley vale también para los matemáticos investigadores. Pero dejemos aquí este tema. Ahora hay otra cuestión que quería examinar: la de cómo se expresaría el hecho de que el investigador en matemáticas del que hablabas no te considerara como un matemático. La respuesta es simple: no se dirigiría a ti para pedirte que le resolvieras una cuestión de matemáticas que él mismo no sabe resolver. En otras palabras, no te haría nunca desempeñar el papel de matemático para él. No se establecería, entre él y tú, esta interacción social particular de "ser matemático para alguien". Pero no hay razón alguna para que te mire con desprecio.

E.- ¿Entonces por qué has dicho antes "quizá"?

E.- Sí, has dicho: "...quizá no considere que tú eres un matemático". ¿Por qué "quizá"?

P.- Ah, ya veo lo que me preguntas. A lo mejor la frase está mal formulada. Lo que quería decir es que, en algunos casos, sí te podría solicitar como matemático. Si, por ejemplo, te pusieras a investigar en matemáticas y te pusieras a trabajar con él, te convirtieras en su colaborador. En este momento, podría ser que te pidiera hacer algún trabajo matemático...

E.- ¿Que él mismo no supiera hacer?

P.- No, te pediría que lo hicieras en su lugar. Pero no como alumno, sino como una especie de "ayudante de matemáticas". Te pediría que le aseguraras la validez de las respuestas que le dieras, que te responsabilizaras de tus soluciones.

E.- Sería un poco como si, cuando se me estropea un grifo, aunque yo mismo lo sepa arreglar, llamara igualmente al fontanero, por ejemplo porque tendría otras cosas que hacer, porque no tengo tiempo. ¿No es eso?

P.- Sí, algo así. Salvo que en este caso no dirías que el fontanero es tu ayudante.

E.- Vale, vale. Pero tengo otra pregunta. Cuando José responde a la profesora de biología, hace de matemático para ella.

P.- Sí.

E.- Y cuando José está en clase con sus alumnos, ¿también es un matemático?

P.- ¡Buena pregunta! A lo mejor la podrías contestar tú solo. Piénsatelo un poco... ¿En qué circunstancias el profesor aparece claramente como un matemático —en el sentido que hemos dicho antes— para sus alumnos?

E.- No lo sé... ¿Cuando corrige un problema, por ejemplo?

P.- En ese caso, los alumnos esperan que la solución que les da el profesor sea correcta, ¿no?

E.- Sí, claro.

P.- Luego sus alumnos lo consideran como un matemático.

E.- Pero en este caso, ¿podemos decir que los alumnos *necesitan* la solución que el profesor les da y cuya validez les garantiza, del mismo modo que mi prima necesitaba que le garantizara la respuesta a su pregunta?

P.- ¡Veo que empiezas a entenderlo!

E.- Gracias...

P.- Así, en tu opinión, ¿la necesitan o no?

E.- Si el profesor les diera una solución falsa... ¡Ellos necesitan la respuesta correcta para aprender! Si el profesor les diera una solución falsa, molestaría mucho a los alumnos. Algunas veces ocurre.

P.- Es verdad. En cuyo caso el profesor no resultaría ser un buen matemático para sus alumnos. Acabas de dar en el clavo: los alumnos necesitan soluciones correctas porque para ellos son instrumentos para aprender. Tienen una necesidad matemática de origen didáctico...

E.- Perdona que te interrumpa. Pero de ahí deduzco que los profesores de matemáticas son matemáticos para sus alumnos.

P.- Sí, en efecto.

E.- Pues, entonces tengo otra pregunta. Los alumnos de una clase de matemáticas, ¿también son matemáticos en el sentido que hemos dicho?

P.- ¡Muy buena pregunta! Pero también la puedes contestar tú solo.

E.- Sí. Pienso en algo... Si a un alumno, pongamos de 1º de ESO, le pide su hermano pequeño que está en primaria que le compruebe unas operaciones que tenía que hacer, entonces este alumno hace de matemático para su hermano pequeño.

P.- Estamos de acuerdo. ¿Y?

E.- Y ocurrirá lo mismo con otro alumno de su clase. Aunque quizá sea menos frecuente.

P.- Sí. Pero te advierto que la pregunta que planteabas era: ¿puede un alumno de una clase de matemáticas ser un matemático en cuanto alumno de esta clase? y en los ejemplos que acabas de dar, no lo consideras como alumno de tal o cual clase. ¿Entonces?

E.- Quieres decir si el alumno puede hacer de matemático para sus compañeros o incluso para el profesor. ¿Es eso?

P.- Sí, eso mismo. ¿Y bien?

E.- Pues, para el profesor, supongo que el alumno no es un matemático. Es a lo sumo un aprendiz de matemáticas, pero ni siquiera un ayudante de matemáticas.

P.- ¿Y respecto de sus compañeros?

E.- Esto ya lo hemos visto. Puede ocurrir que tenga que hacer de matemático para alguno de sus compañeros de clase. Pero esta situación no se da todos los días.

P.- Bueno. Pues ahora soy yo la que te voy a hacer una pregunta. Si los alumnos nunca hacen de matemáticos respecto al profesor ni, de manera oficial, respecto de los demás alumnos, ¿qué va a ocurrir? ¿Ves lo que pasa?

E.-...

P.- Decimos que si A es un matemático para B, A se responsabiliza de la validez de las respuestas que da a las preguntas de matemáticas que le plantea B.

E.- Sí.

P.- ¿Luego...?

E.- ¡Ah ya! Quieres decir que si el alumno nunca hace de matemático para el profesor, entonces nunca se responsabiliza de la validez de las respuestas que da.

P.- ¿Luego...?

E.- Luego, concretamente, el alumno resuelve problemas que le plantea el profesor, pero no se responsabiliza de la validez de su respuesta. Esperará que el profesor le diga si está bien o mal. Es lo normal, dado que el profesor no lo considera como un matemático.

P.- ¡Veo que empiezas a razonar! Y acabas de poner el dedo en uno de los problemas didácticos más difíciles. ¿Qué hacer para que el alumno sea a la vez alumno y matemático? Es decir, para que reconozca al profesor como matemático, pero también asuma hacer él mismo de matemático, y responsabilizarse de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean.

E.- Sí, ya veo. Por ejemplo, el profesor podría pedir a los alumnos que, de vez en cuando, fueran ayudantes de matemáticas, dándoles pequeños trabajos útiles o necesarios para la vida matemática de la clase. Por ejemplo, el profesor podría pedir a equipos de alumnos que redactaran las correcciones de los ejercicios que se hacen en clase, para repartir después estas correcciones entre los demás alumnos.

P.- Lo que dices no es ninguna tontería. Pero el problema didáctico del que te hablaba es mucho más complicado que todo esto. Y prefiero que lo dejemos aquí por hoy...

E.- ¡Espera! Te quería hacer otra pregunta antes de acabar.

P.- Bueno, pero será la última.

E.- Es respecto a la tienda. Has dicho que habías apoyado la idea de la creación de Tiendas en el Instituto Juan de Mairena.

P.- Sí.

E.- He pensado que era porque querías que los profesores de matemáticas se acordaran constantemente de que también son matemáticos —en el sentido que has dado antes—.

P.- Sí.

E.- Pero justamente ahora hemos visto que un profesor de matemáticas es necesariamente un matemático para sus alumnos. Si se le considera profesor de matemáticas, y si acepta serlo, entonces quiere decir que debe garantizar la validez de lo que dice en materia de matemáticas. Por lo tanto, es un matemático. Todo profesor de matemáticas es matemático para aquellos que lo ven como un profesor de matemáticas y frente a quienes él se considera profesor de matemáticas.

P.- Es un buen razonamiento. Sigue.

E.- Sí. Pero entonces, ¿por qué quieres que también sea matemático para otros que no son sus alumnos? Quiero decir en la Tienda de Matemáticas. ¡Ésta es la pregunta!

P.- Muy bien. ¡Es una bonita pregunta! Para contestarla, voy a añadir una observación a tu pequeño razonamiento. Un profesor de matemáticas es un matemático. Pero un matemático no es necesariamente profesor de matemáticas. Por ejemplo, cuando José responde al "pedido" de su colega de biología, hace de matemático para ella, pero no es su profesor de matemáticas.

E.- Sí, de acuerdo.

P.- Y ahí, ves, volvemos a encontrar la enfermedad didáctica. Un profesor de matemáticas es, ciertamente, un matemático. Pero lo puede olvidar fácilmente si sólo hace de matemático para sus alumnos. Si sólo es matemático por razones didácticas. O, por decirlo de manera más técnica, si sólo es matemático para satisfacer necesidades matemáticas de origen didáctico. Porque se olvida entonces que hay necesidades matemáticas que no son de origen didáctico.

E.- Como lo de mi prima, por ejemplo.

P.- Exacto. La Tienda está ahí para recordarles que pueden ser matemáticos para otros, además de para sus alumnos. Para recordarles que hay necesidades matemáticas que no tienen nada que ver con el aprender y el enseñar matemáticas... Y, finalmente, porque estas necesidades matemáticas... ¡bien hay que satisfacerlas! Eso es todo. ¿Te parece suficiente?

E.- Sí.

P.- Pues lo dejaremos aquí por hoy.

E.- Como quieras. Gracias.

¿Por qué hay que estudiar matemáticas?

P.- Y bien, ¿cómo estás esta semana?

E.- Muy bien, gracias. Pero te ruego me disculpes por lo de la última vez. Esperaba a un amigo para que me arreglara el ordenador...

P.- Sí, sí. No te preocupes. Mejor no nos demoremos y retomemos el trabajo.

E.- Sí. Además he escuchado la grabación de nuestra última sesión de trabajo y me han quedado algunas dudas. ¿Qué te parece si empezamos por ellas?

P.- Adelante.

E.- Bueno... Hasta aquí hemos dicho que las matemáticas no existen sólo para que la gente las aprenda y las enseñe. Es algo que sirve para resolver ciertas cuestiones. Cuando uno se plantea un problema de matemáticas, puede ir a consultar a un "matemático" —en el sentido que tú propones—. Estoy de acuerdo. El olvidar que las matemáticas sirven sobre todo para resolver problemas, eso es la enfermedad didáctica. Muy bien.

P.- Sí. Aprender y enseñar son medios al servicio de un fin.

E.- Eso mismo.

P.- Pues, adelante con tu pregunta.

E.- Mira. Si, al encontramos con una cuestión de matemáticas, podemos en todo momento hallar en nuestro entorno a un "matemático" para que nos la resuelva, ¿por qué se obliga a todos los alumnos a aprender matemáticas en la escuela? Ésta es mi primera pregunta.

P.- Ya. Déjame decirte que tu pregunta es muy ingenua, aunque no por ello deja de ser una buena pregunta.

E.- ¿Por qué muy ingenua?

P.- Pues, porque olvidas a la mitad del mundo.

E.- No te entiendo...

P.- No me entiendes. Bueno. Pues escúchame bien. Cuando eras pequeño, supongo que algunas veces te caías, te hacías daño o te salía un grano en la nariz. ¿Y qué hacías en estos casos? Ibas a ver a tu padre o a tu madre, o quizá a tu prima, para que te curaran la herida. Y, por ejemplo, tu madre te decía: "No es nada..." Y te ponía un poco de mercromina.

E.- ¡Sí, no me gustaba nada la mercromina!

P.- Bueno, a ver, ¿Cómo interpretarías tú la interacción social entre tú y tu madre, en este caso?

E.- Ya veo por donde van los tiros. Quieres decir que en este caso yo era B, mi madre era A y B hacía que A desempeñara el papel de médico para B.

P.- Exacto. Ahora bien, ¿es acaso tu madre un médico en el sentido habitual, legal, de la palabra?

E.- No.

P.- Y sin embargo hacía de médico para ti. En tanto que a tu madre le era muy difícil negarse a cuidarte alegando que no era médico. No le quedaba más remedio. Tú le imponías —sin saberlo— una responsabilidad "médica". De manera limitada, pero real.

E.- Sí, pero también me hubiera podido llevar al médico, a uno de verdad.

P.- Tal vez. Pero en este tipo de casos, de hecho, no lo hacía. Asumía su papel de médico. ¡Imagina además lo que pasaría si acudiéramos al médico cada vez que tenemos una heridita! Por cierto, estoy casi segura de que, en lo que va de mes, habrás hecho de médico para alguien, ¿no es cierto?

E.- No lo sé... ¡Sí, es verdad! La semana pasada uno de mis compañeros se resfrió y, como vi que no se cuidaba, le di una medicina que me quedaba de un resfriado que había tenido dos semanas antes.

P.- Y en este caso, además, no fue él quien te pidió que hicieras de médico para él.

E.- Es verdad, fue espontáneo.

P.- Otra cosa. La semana pasada no nos pudimos encontrar porque tu amigo vino a arreglarte el ordenador a la hora a la que habíamos quedado.

E.- Sí, la verdad es que lo siento mucho, Profesora.

P.- Tranquilo, no pasa nada. ¿Tu amigo es informático?

E.- ¡No, qué va! Es músico.

P.- Y cuando tienes un problema con el ordenador, ¿siempre recurres a él?

E.- Sí, sabe mucho de máquinas...

P.- Así, ¿es tu informático?

E.- Sí. Y es verdad que si él no supiera solucionarme los problemas tendría que recurrir a un informático de verdad.

P.- No estoy muy segura. Porque un informático de verdad, hoy en día, no se sabe muy bien lo que es —en el sentido en el que hablábamos de un médico de verdad, claro—. La situación no es tan clara, los papeles que asume cada uno son mucho más flexibles en este campo. Pero no importa. Lo que también puede ocurrir es que algún día tú tengas que hacer de informático para alguien de tu entorno.

E.- Es verdad, ya me ha ocurrido. Pero si te entiendo bien, lo que quieres decir es lo siguiente: nos puede ocurrir, a cada uno de nosotros, que tengamos que hacer de informático, de médico o de matemático para otra persona. ¿Es eso?

P.- ¡Exactamente! Y ahora podemos volver a tu pregunta. No sólo se aprenden matemáticas para hacer de matemático de uno mismo. Porque es verdad que uno siempre encontrará a alguien más o menos cercano que le pueda resolver sus problemas. A menos, claro, que nos

planteemos cuestiones muy difíciles. Pero entonces es como con una enfermedad grave: hay que ir a ver a un especialista. No. En realidad, hay una buena razón para aprender matemáticas porque, en la vida social, uno se puede ver conducido, e incluso obligado, a hacer de matemático para alguien. Lo saben muy bien los padres que no han ido a la escuela y que, cuando sus hijos son pequeños, se ven obligados a hacer de matemáticos, de gramáticos, de historiadores, etc., para ellos. Es a veces doloroso que, por falta de instrucción, no podamos ser lo que los demás —a veces aquellos que nos importan más— esperan que seamos. Porque nos da la impresión de que no tenemos valor social, o familiar. Somos una madre, un padre o un amigo del que casi no se puede esperar nada.

E.- ¡Tengo algo que objetar, Profesora!

P.- Dime...

E.- Pues bien, en primer lugar, este "valor social" del que hablas no se desprende sólo de lo que se aprende en la Escuela. Mi abuela no fue nunca a la escuela y, para mí, sabía muchas cosas en muchos ámbitos...

P.- Sí. Y viceversa. Uno puede estar muy instruido y no tener ningún valor social, por ejemplo porque la instrucción que ha recibido no se deja ver en interacciones sociales, no le permite hacer de matemático, de médico, de consejero fiscal o de lo que sea. Fíjate que es hacia ahí exactamente que nos encaminamos cuando, como parecías considerar, uno aprende matemáticas, biología o lo que sea sólo para uno mismo, creyendo que el estudio se justifica sólo por el hecho de sernos útiles a nosotros en primera persona.

E.- Quieres decir que es una concepción de las cosas muy egoísta.

P.- O, digamos, individualista. Pero dejemos de lado la moral. Es una visión de las cosas que no se corresponde con los hechos, con la manera que tenemos de vivir concretamente en sociedad, con la familia, los vecinos, los amigos, etc.

E.- Sí, es verdad. Pero entonces tengo otra objeción. Has dicho que, en la práctica, nos vemos todos conducidos, un día u otro, a hacer de médicos o de matemáticos para alguien. Y ello porque uno no va a consultar a un médico o a un profesor de matemáticas cada vez que tiene una heridita o que tiene una pequeña dificultad de tipo matemático.

P.- Sí.

E.- Pero podemos llevar este razonamiento al extremo. En algunos casos, no molestaremos a nadie, ni siquiera en nuestro entorno más próximo. Seremos nuestro propio médico o matemático. Así pues, no es sólo para los otros que aprendemos; es primero para uno mismo.

P.- Veo que piensas. Y además piensas bien.

E.- ¡Gracias, Profesora!

P.- Tienes toda la razón. Pero como ves, es siempre la misma razón. No hay un yo, por un lado, y los demás por el otro lado. Hay lo que puedo hacer por mí misma, sin molestar a nadie, y aquello para lo que necesito recurrir a alguien de mi entorno. Y después hay lo que me obliga a buscar la ayuda de alguien más alejado, un médico, un fontanero, un profesor, etc. Además, fíjate que, para poder hacer esto, se tiene que cumplir una condición: que cada uno tenga una instrucción suficiente como para saber en qué ámbito situar las dificultades que le van surgiendo, para saber si puede resolverlas por sí mismo o si es más razonable pedir la ayuda del prójimo, o aun si esta ayuda va a ser suficiente o no. Es necesario un mínimo de instrucción en cada ámbito, una instrucción básica.

E.- ¡Pues, entonces, todavía tengo otra objeción!

P.- Adelante.

E.- Mira, si consideramos todas las dificultades que uno puede encontrar en la vida o sobre las cuales puede ser consultado... por ejemplo, hace unos días un amigo mío tuvo un conflicto con la propietaria de su piso, y me pidió consejo.

P.- Quería que le hicieras de "asesor jurídico".

E.- Eso es. Pero esto, precisamente, no forma parte de lo que se enseña en la Escuela. Para tener un verdadero valor social, como tú decías, también tendríamos que instruimos en este ámbito. ¡Y en muchos otros!

P.- Sí, sí, es verdad. Y aquí volvemos al caso de tu abuela. Para vivir bien y ayudar a los demás a vivir bien, hay que adquirir todo tipo de competencias. La instrucción "formal", la de la Escuela, nos proporciona un mínimo, o mejor una base, un fundamento. Muchas veces, el resto de competencias que adquirimos es el fruto de una instrucción "informal", dada por diferentes circunstancias de la vida.

E.- ¿Me puedes dar un ejemplo?

P.- Sí. Volvamos a las matemáticas y a la Tienda de matemáticas, porque eso es lo que estudiamos, ¿no?

E.- Sí, sí.

P.- Vale. Los profesores de matemáticas, Marta, José y Luis, han recibido una instrucción "formal" en matemáticas. El episodio al que hacemos referencia ocurrió hace algunos años. Sabes que durante la reunión evocaron una cuestión que les planteó una colega de matemáticas...

E.- Sí, la que quería saber en qué casos $\cos(r\pi)$, donde r es un número racional, puede escribirse con una superposición de radicales. He pensado en la cuestión y no veo por dónde cogerla.

P.- Pues, precisamente, a esta hora, supongo que ellos sí deben saber cómo contestar, aunque su respuesta sea incompleta. La respuesta no la han aprendido durante sus estudios de matemáticas, ni en el instituto ni en la universidad, sino a raíz de su trabajo en la Tienda de Matemáticas. ¿Entiendes lo que quiero decir?

E.- Sí. Pero esto representa muy poco en comparación con lo que han aprendido durante sus estudios "formales".

P.- No te engañes. En realidad, cuanto más envejecemos, más conocimientos tenemos como fruto de una instrucción informal, adquiridos en situaciones en las que no había un profesor para enseñarnos. Por ejemplo, lo que sabe un investigador de un área dada es en gran parte el resultado de una instrucción informal adquirida durante las investigaciones en las que ha participado, ya sea como director, como colaborador o como ayudante. Y esto es tanto más verdad cuanto más viejo se es. ¡Dímelo a mí!

E.- Tampoco eres tan vieja...

P.- ¡Míralo él, qué simpático de repente! Gracias, pero ahora tenemos que dejarlo. Nos veremos la semana que viene, tal como habíamos quedado.

E.- Sí, gracias. Hasta la próxima.

La didáctica de las matemáticas, ciencia del estudio

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días. Supongo que debes tener aún alguna pregunta, ¿no?

E.- Sí, claro. La última vez tomaste el ejemplo del coseno...

P.- Sí.

E.- Y he vuelto a pensar en lo de la enfermedad didáctica. Has dicho que la Tienda permitía a los profesores recordar que son matemáticos, y no sólo para sus alumnos.

P.- Sí, les recuerda que las matemáticas no son sólo algo que se aprende y que se enseña.

E.- Eso es. Pero entonces, con lo de los cosenos, los profesores tendrán que aprender cosas nuevas, puesto que en un principio no saben contestar a la pregunta.

P.- Claro.

E.- ¡Y entonces vuelven a caer en la enfermedad didáctica!

P.- ¡Espera, espera! No hay que ir tan rápido. No todo es enfermedad didáctica. Estos profesores tienen que aprender cosas, pero no para enseñarlas más tarde. Lo que quieren es poder resolver una cuestión que alguien les ha planteado. Si te acuerdas, se trataba de colaborar en la actualización del Curso de Trigonometría del Instituto.

E.- Eso es.

P.- Aprender, en este caso, es para estos profesores un medio al servicio de un fin que no es enseñar lo que habrán aprendido sino responder a una cuestión que se les ha planteado. En muchos casos, para responder a las cuestiones planteadas, no tendrán que aprender nada; lo tendrán que hacer, y punto.

E.- Por ejemplo, en el caso de la tabla simétrica de la profesora de biología.

P.- Eso mismo. Pero aquí quisiera introducir otra consideración.

E.- ¿Sí?

P.- Para aprender la información necesaria para contestar a la cuestión del coseno, los profesores no reciben ninguna enseñanza. Creo que eso es lo que pasó. La enfermedad didáctica también consiste en creer que, para que alguien aprenda algo, tiene que seguir un curso, o recibir clases sobre ese algo.

E.- ¿Entonces quieres decir que la enseñanza no es imprescindible?

P.- ¡Claro que no! Volviendo a donde estaba. Estos profesores tienen que estudiar una cuestión. Ésa es la palabra clave: "estudiar". Para aprender lo que quieren saber, van a estudiar. Para estudiar, podrán tomar clases o seguir un curso sobre el tema en cuestión. Pero muchas veces no podrán contar con esta ayuda. Eso es lo que ocurre con lo que he llamado la "instrucción informal". Nos tenemos que instruir, pero sin profesor, sin enseñanza.

E.- Entonces, ¿cuál es el papel de la enseñanza?

P.- Es una ayuda. Es una ayuda útil, potente. Eso es justamente lo que uno descubre cuando tiene que estudiar sin profesor. Es como si ahora tú quisieras instruirte sobre la cuestión del coseno. Eso es lo que quería decir, y nada más.

E.- Si me permites, Profesora, voy a intentar resumir lo dicho hasta aquí...

P.- Muy bien, adelante.

E.- En ciertos casos, para poder actuar, hay que aprender. Para aprender, estudiamos. Un medio para estudiar es seguir un curso o tomar clases. Pero muchas veces, cuando uno ya no está en la escuela, tiene que estudiar de otra forma, porque no encuentra una enseñanza "hecha a medida".

P.- Eso mismo. Y añadiré algo más: incluso cuando existe una enseñanza "hecha a medida", como tú dices, estudiar no se reduce al mero hecho de asistir a clase. Pero supongo que este tema lo volveremos a tratar más adelante.

E.- Sí, de acuerdo. Pero ahora tengo otra pregunta, siempre sobre la enfermedad didáctica.

P.- Te escucho.

E.- Cuando trabajan en la Tienda, José, Luis o Marta hacen de matemáticos, pero no de profesores de matemáticas. Éste era precisamente uno de los objetivos de la creación de una Tienda de Matemáticas en el Instituto.

P.- Sí.

E.- Pues entonces, en algunos casos —no en todos, claro, pero sí en algunos—, tendrán que aprender cosas que no sabían de entrada. No enseñar, pero sí aprender. Y ya volvemos a lo didáctico. Si no es así, ¿a qué llamas tú "didáctico"?

P.- Tienes toda la razón. Pero antes de contestar a tu pregunta, te recordaré brevemente el esquema de organización de la Tienda. En la Tienda propiamente dicha, se toman los "encargos" de los clientes. Digamos que se reciben sus problemas y se discute con ellos para hacerles precisar qué es lo que necesitan. Además, para realizar los pedidos, la Tienda necesita un taller: el Taller de Matemáticas del Instituto. En el Taller, se "fabrican" las respuestas a las cuestiones planteadas. Algunas veces, los miembros del Taller disponen de todo lo necesario -en términos de conocimientos matemáticos- para fabricar la respuesta...

E.- Como en el caso de la tabla simétrica o de los tendedores de María.

P.- Exacto. Éste es un primer caso. También hay un segundo caso, que es el de los cosenos. Aquí, el Taller de Matemáticas no dispone a priori de los elementos necesarios para fabricar una respuesta apropiada.

E.- Hubieran podido rechazar el encargo, ¿no?

P.- Claro, claro. No siempre encuentras en el supermercado lo que quieres o lo que podrías desear. Por ejemplo, si vas al supermercado de tu barrio para comprar una tonelada de arroz, seguro que te dirán que no aceptan el encargo.

E.- ¡Hombre, pues claro!

P.- Bueno. Pues, en el caso de los cosenos, el Taller de Matemáticas, o por lo menos algunos de sus miembros, se van a poner a trabajar para estudiar la cuestión que les ha sido planteada.

E.- Tendrán que estudiar.

P.- Sí, eso mismo. Y ahora contestare a tu pregunta. El adjetivo "didáctico" se corresponde con el sustantivo "estudio". Un proceso didáctico es un proceso de estudio.

E.- ¿Entonces afecta al alumno?

P.- Sí y no.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues bien, en un proceso didáctico, en un proceso de estudio, la distinción alumno-profesor no aparece necesariamente tan marcada como cuando nos referimos al marco escolar, con un profesor por un lado y los alumnos por el otro. En el caso del Taller de Matemáticas, hay un equipo que va a estudiar la cuestión del coseno. Aparentemente, el equipo se va a organizar en torno a Luis. Podemos suponer que es Luis quien dirige el estudio.

E.- ¿Lo que quiere decir...?

P.- Lo que quiere decir, por ejemplo, que será él el responsable del avance del estudio frente al Taller de Matemáticas. Lo que quiere, decir también que, en la práctica, será él el que deberá abrir la ruta, mostrar el camino y guiar todo el proceso.

E.- ¡Será el líder del equipo!

P.- Sí, si lo quieres decir así. En un proceso didáctico, siempre aparece una comunidad cuyos miembros desempeñan papeles más o menos diferenciados. Si nos referimos al marco escolar, el líder, el director de estudio, es generalmente el profesor. Lo que la gente llama el proceso de enseñanza/aprendizaje es, de hecho, una forma particular del proceso didáctico.

Por lo tanto, la didáctica de las matemáticas es la ciencia que estudia los procesos didácticos, los procesos de estudio de cuestiones matemáticas.

E.- ¡Entonces el ámbito de esta ciencia es más amplio que el mero estudio de lo que ocurre en una clase!

P.- Sí. Es más amplio porque, como ves, la didáctica de las matemáticas se propone entender o analizar tanto los procesos didácticos relacionados con el Taller de Matemáticas, por ejemplo, como los procesos didácticos que se producen en una clase normal de matemáticas. Y, al mismo tiempo, no hay que olvidar que, para que una clase funcione, tienen que existir también procesos didácticos fuera de la clase. Los alumnos tienen que estudiar por sí mismos, individualmente o en grupo. Estudian a veces con la ayuda de sus padres, o incluso bajo la dirección de sus padres, siempre en relación con la clase pero fuera de ella. O sea: lo que ocurre en clase genera toda una serie de procesos didácticos. Y en estos procesos didácticos, el esquema del alumno y del profesor, el esquema de la enseñanza/aprendizaje, no es, como ves, el mejor. En un grupo de alumnos que trabajan juntos sobre algo que les ha encargado el profesor, podrá haber algunos alumnos que hagan de cabecillas para impulsar el proceso de estudio, sin que ninguno de ellos se tenga por el profesor. Y, evidentemente, sin que haya enseñanza. Además, también podrán pedir ayuda a alguien que no sea del grupo, como un alumno mayor o un adulto, etc. En este caso no habrá clase, ni profesor, pero sí proceso didáctico.

E.- Entonces, estos procesos didácticos particulares en los que participan los alumnos —con sus compañeros de clase, sus padres, etc. — son en realidad "subprocesos" del proceso de enseñanza/aprendizaje que conduce el profesor.

P.- Cierto. Y es conveniente que todos estos subprocesos converjan para hacer avanzar el proceso didáctico que dirige el profesor. Si sólo habláramos del proceso de enseñanza/aprendizaje, sólo pensaríamos en un modelo bastante particular de proceso didáctico. Y esto no es lo mejor para entender, en general, lo que es estudiar. Además hay una tendencia a olvidar que el proceso de enseñanza/aprendizaje sólo puede existir si se dan al mismo tiempo otros procesos didácticos —que podemos llamar periféricos, si quieres—. Y todos estos "olvidos" no ayudan a entender lo que pasa en una clase.

E.- Ya veo...

P.- Espera un momento. Cuando digo "hay una tendencia a olvidar", quiero decir que el profesor tiende a olvidar, y también el alumno.

E.- Sí, vale, vale. Aunque hay un caso que no has citado. Es el del alumno que estudia solo, pero en relación con el trabajo de clase. Solo, sin que nadie le ayude. ¡Es, sin embargo, un caso muy típico!

P.- Sí, totalmente. Y ahí, ves, también hay un proceso didáctico, aunque no haya proceso de enseñanza. La comunidad de estudio se reduce a una sola persona, y esta persona es su propio director de estudio.

E.- Bueno... ¡Pero aún me quedan dos preguntas!

P.- ¿Ah, sí?

E.- Hemos dicho que para aprender algo uno estudia. También hemos dicho que podía haber estudio sin enseñanza, aunque una enseñanza resulte casi siempre muy útil. Mi pregunta es: ¿puede haber aprendizaje sin enseñanza e incluso sin estudio?

P.- Claro que sí. Incluso te diré que una parte importante de lo que hemos llamado "instrucción informal" es el resultado de un aprendizaje que no proviene del estudio.

E.- Así, todo proceso de aprendizaje no es un proceso didáctico.

P.- No.

E.- Y la didáctica sólo se interesa por los procesos didácticos. ¿Lo he entendido bien?

P.- Sí. Pero tu descripción es incompleta. En realidad, se pasa siempre muy rápido, y sin casi darse cuenta, de una cuestión informal a un esbozo de estudio: intentamos informarnos sobre algo, preguntamos a los de nuestro alrededor, probamos a ver qué pasa, o incluso nos compramos un libro. Muy a menudo, es verdad, estas tentativas fracasan. Lo que quiero decir es que todas las actividades humanas suscitan procesos didácticos o, si prefieres, que estamos constantemente a punto de pasar de una actividad habitual, no didáctica, a una actividad didáctica.

E.- ¡Es la enfermedad didáctica!

P.- ¡No! Precisamente, la enfermedad didáctica consiste en no saber distinguir entre lo no didáctico y lo didáctico. No se puede entender qué es lo didáctico si uno no tiene una idea clara sobre lo no didáctico. ¿Me sigues?

E.- Creo que sí. Por eso dices que, en matemáticas, hay que hacer pequeños trabajos matemáticos que se puedan realizar a partir de lo que uno ya sabe, es decir tener una actividad no-didáctica. Y todo como condición para entender mejor y saber conducir mejor una actividad didáctica.

P.- Sí, eso es. Ahora entiendes mejor lo de la Tienda de Matemáticas.

E.- Sí. Pero aún me queda una pregunta. ¿Puedo?

P. - Sí, claro.

E.- He pensado en tu definición de matemático. En lo que a mí respecta, me parece que he tenido muy pocas ocasiones para hacer de matemático -fuera de las clases particulares, claro-. En el fondo, tengo la impresión de que se me presentan más oportunidades de hacer de médico o de informático que de matemático.

P.- No te equivocas, no. Es verdad que la gente tiene más tendencia a pedir consejos a su alrededor en cuestiones de salud o, más en general, de su vida cotidiana. ¡E incluso de su vida sentimental! Pero no ven qué se puede pedir en matemáticas. Es verdad.

E.- ¡A lo mejor es que no tienen necesidades matemáticas!

P.- A lo mejor. Por qué no. De todas formas, el reconocer que tal o cual necesidad es una necesidad de tal o cual tipo no es una actitud espontánea. Es una actitud que se aprende. Hay grupos sociales, por ejemplo, que no se pueden imaginar que haya maneras de comer o de cuidarse diferentes de las suyas.

E.- Quieres decir que hay gente que no se plantea nunca cuestiones de dietética o de salud. Y que, por tanto, no se cuidan nada.

P.- Eso mismo. Pues, con las matemáticas, sucede lo mismo, no solo en ciertos grupos sociales, sino en toda la sociedad.

E.- ¡Es un problema cultural!

P.- Sí, eso es.

E. - ¿Y no podrías precisar un poco más tus afirmaciones?

P.- Es un fenómeno general. En la vida de una sociedad y en un momento dado de su historia, la mayoría de las necesidades no son explícitas, no se expresan fácilmente. En términos técnicos, diríamos que son necesidades *latentes*...

E.- ¿En oposición a...?

P.- A lo que se pueden llamar necesidades *patentes*, reconocidas por la gente, de las que se hacen cargo las instituciones de la sociedad.

E.- ¿No me podrías dar algún ejemplo en relación a las matemáticas?

P.- Pues mira, ¿sabes qué? Había antaño una noción que facilitaba el reconocimiento tanto de las necesidades matemáticas como de la capacidad para satisfacerlas —necesidad de

entender y necesidad de actuar—. Hasta principios del siglo XIX, se distinguían las matemáticas puras...

E.- ¡De las matemáticas aplicadas!

P.- No, no. No se hablaba de matemáticas aplicadas, aunque sí de aplicaciones de las matemáticas. Se hablaba de "matemáticas mixtas".

E.- ¿Y eso qué quería decir?

P.- La idea es la siguiente... Hay muchas cuestiones relativas a fenómenos naturales o a la vida en sociedad a las que podemos responder con ayuda de las matemáticas y de un pequeño número de conocimientos no matemáticos, por ejemplo, de física, biología, comercio, etc. En otras palabras, basta con saber un poco de física, biología o comercio y, a partir de ahí, dejar que las matemáticas hagan el resto. Como ves, la noción de matemáticas mixtas ponía énfasis en el poder explicativo de las matemáticas.

E.- ¿Y no me podrías dar algún ejemplo?

P.- Sí, claro que sí. Pero sólo te diré la pregunta. ¡Así tendrás un motivo para hacer de matemático!

E.- Muy bien.

P.- Bueno. Supongo que alguna vez te has sumergido en el agua y, habrás notado que, al mirar desde el fondo la superficie del agua, ves el cielo justo encima de ti, pero por los lados, el agua se comporta como un espejo. ¿Te ha pasado?

E.- Sí. ¡Pero esto es un fenómeno de refracción!

P.- Sí. Las leyes que rigen la refracción, eso es lo máximo que necesitas para explicar el fenómeno. Lo demás son matemáticas. Te hago notar de paso que aquí se trata de algo de lo que ya has oído hablar porque también sabes algo de física, ¿no?

E.- Claro. ¿Pero crees que saber todo esto es realmente una necesidad que yo tengo?

P.- Tu pregunta es legítima, pero la respuesta no es tan simple como parece. Todo depende de lo que quieras hacer. Es tu problema. Te repito que hay gente que vive sin sentir nunca ninguna necesidad, sin plantearse nunca ninguna cuestión.

E.- ¡Gracias por la alusión!

P.- No me lo agradezcas. Te voy a contar una anécdota bastante trágica y que te mostrará, espero, lo ridículo de tu susceptibilidad. Es una historia verdadera. Hace algunos años, en la maternidad de un hospital, una enfermera principiante que se encargaba de preparar los biberones de los recién nacidos se equivocó y les puso sal en lugar de azúcar. Resultado: se murieron más de 10 bebés.

E.- ¡Qué barbaridad! Sal en lugar de azúcar... ¿Cómo puede ser que se murieran por tan poca cosa?

P.- No es tan poca cosa como parece. Fíjate bien. Sabrás que las moléculas de sal son mucho más pequeñas que las de azúcar. Y también debes saber que la presión de una solución es proporcional al número de moléculas que contiene, ¿no?

E.- Sí, más o menos.

P.- Pues bien, con esto y el fenómeno de la ósmosis se puede comprender lo catastrófico del error de la enfermera: la sal hace aumentar radicalmente la osmolaridad del plasma sanguíneo. Para equilibrarla, las células se deshidratan acumulando agua en los vasos sanguíneos y se eleva mucho la tensión arterial. Es fácil entonces que se produzcan, en los recién nacidos, hemorragias cerebrales u otros accidentes cardiovasculares. Pero el niño se muere, esencialmente, por deshidratación.

E. - Me asustas, Profesora. Pero todo no es así, ¿verdad?

P.- No, claro que no. Hace algunos días, ves, estuve hablando con unos colegas que organizan un encuentro internacional. Un encuentro muy oficial, con representantes de 6 países europeos. Había un representante por país, es decir, 6 personas. Algunos de los organizadores querían que cada uno pudiera hablar en su propio idioma.

E.- ¡Es normal! No veo por qué un griego no podría hablar en griego y un italiano en italiano.

P.- Sí, sí, claro. ¡No ves por qué! A mí también me gusta mucho más expresarme en mi lengua que tener que hablar en inglés. Es normal. También es el principio del mínimo esfuerzo. Pero mira: para 6 idiomas distintos...

E.- Se necesitan 6 intérpretes. ¡Es mucho!

P.- ¡Qué dices! ¡Se necesitan muchos más!

E.- Uy, sí, perdón. Si para cada par de idiomas se necesita un intérprete, se necesitarán

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \dots \text{¡15 intérpretes!}$$

P.- ¡Ah! ¡Lo ves! Y encima no has tenido en cuenta que un intérprete sólo traduce en un sentido: para que los representantes griego e italiano se puedan comunicar, se necesitan 2 intérpretes.

E.- Luego son 30 intérpretes.

P.- Eso mismo. Imagínate la situación: 6 personas alrededor de una mesa y, a su alrededor, en las cabinas de intérpretes, ¡30 personas más! Claro que la situación no es tan dramática como la del azúcar y la sal...

E.- No, pero debe ser muy caro.

P.- Sí. Yo diría desmesuradamente caro. Pero no es más que mi opinión. También se puede opinar lo contrario. De todas formas, lo que sí se necesita es poder decidir con conocimiento de causa. Si restringimos a 3 los idiomas de trabajo -por ejemplo, el castellano, el inglés y el francés-, sólo se necesitarán 6 intérpretes. Tantos intérpretes como representantes. Y si escogemos un único idioma...

E.- ¡El inglés, claro!

P.- Sí. Nosotros decidimos trabajar en inglés. A decir verdad, en el grupo de trabajo había un español, un francés, un italiano, un griego, un portugués y un alemán. No había ningún representante inglés. Escogimos el inglés para estar todos en igualdad de condiciones. Pero bueno, en este caso...

E.- No necesitasteis ningún intérprete.

P.- Exacto. Porque todos habíamos aprendido inglés en la escuela. Y ahora, si me perdonas, me tengo que marchar. Nos veremos dentro de un mes. Tienes tiempo para pensar en todo esto. Ánimo.

E.- Gracias, Profesora.

Síntesis 1

No se puede abordar el tema de la *enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* sin preguntarse al mismo tiempo qué son las matemáticas, en qué consisten y para qué sirve hacer matemáticas. Ahora bien, estas preguntas no pueden referirse únicamente a las matemáticas de la escuela, tienen que abarcar todas las matemáticas que existen en nuestra sociedad.

Podríamos pensar que cada uno de nosotros tomado individualmente puede vivir sin necesidad de matemáticas o, por lo menos, sin muchas de las matemáticas que se estudian

en la educación obligatoria. Pero esta creencia sólo se da porque, de hecho, no vivimos solos sino en sociedad: en una sociedad que funciona a base de matemáticas ¡Y en la que hay gente capaz de hacer de matemático para cubrir las necesidades de los demás, incluso cuando éstos no reconocen sus propias necesidades matemáticas.

El hecho de que se enseñen matemáticas en la escuela responde a una necesidad a la vez individual y social: cada uno de nosotros debe saber un poco de matemáticas para poder resolver, o cuanto menos reconocer, los problemas con los que se encuentra mientras convive con los demás. Todos juntos hemos de mantener el combustible matemático que hace funcionar nuestra sociedad y debemos ser capaces de recurrir a los matemáticos cuando se presenta la ocasión. La presencia de las matemáticas en la escuela es una consecuencia de su presencia en la sociedad y, por lo tanto, las necesidades matemáticas que surgen en la escuela deberían estar subordinadas a las necesidades matemáticas de la vida en sociedad.

Cuando, por las razones que sea, se invierte esta subordinación, cuando creemos que las únicas necesidades sociales matemáticas son las que se derivan de la escuela, entonces aparece la "enfermedad didáctica". Este reduccionismo lleva a considerar que las matemáticas están hechas para ser enseñadas y aprendidas, que la "enseñanza formal" es imprescindible en todo aprendizaje matemático y que la única razón por la que se aprenden matemáticas es porque se enseñan en la escuela.

Se reduce así el "valor social" de las matemáticas (el interés social de que todos tengamos una cultura matemática básica) a un simple "valor escolar", convirtiendo la enseñanza escolar de las matemáticas en un fin en sí mismo.

Este tipo de reduccionismo[†] puede conducir a "no tomarse en serio" las matemáticas que se hacen en la escuela, considerándolas como un mero "artefacto escolar". Aparece entonces un problema didáctico que puede formularse como sigue: "¿Qué hacer para que los alumnos se sitúen como matemáticos ante las cuestiones matemáticas que se les plantean en la escuela, y para que asuman ellos mismos la responsabilidad de sus respuestas?"

Tenemos aquí un ejemplo de problema relativo a las actividades matemáticas escolares que no es posible entender desde una perspectiva puramente escolar, sin tomar en cuenta lo que ocurre fuera de la escuela, y en particular la poca visibilidad de las matemáticas en el conjunto de la sociedad. De ahí que no podamos separar los procesos de enseñanza y aprendizaje del resto de las actividades matemáticas.

Hemos de tener en cuenta que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del *proceso de estudio de las matemáticas*, entendiendo la palabra "estudio" en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también "estudia" problemas de matemáticas.

Lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el *estudio* y con la *ayuda al estudio* de las matemáticas, identificándose entonces los *fenómenos didácticos* con

[†] Habría que decir que éste no es el único tipo posible de reduccionismo respecto al origen de las necesidades matemáticas y, en general, respecto a la naturaleza de las matemáticas. Así, cuando se da prioridad de manera absoluta a las *necesidades matemáticas de origen extramatemático*, aparece lo que podríamos denominar "enfermedad utilitarista", mientras que si son las *necesidades de origen intramatemático* las únicas que se consideran, entonces nos encontramos con la "enfermedad purista". No entraremos aquí en las disfunciones que cada una de estas "enfermedades" puede provocar en el seno de la comunidad matemática puesto que éste es un tema que no se trata en los *Diálogos*.

los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. La didáctica de las matemáticas se define, por tanto, como la *ciencia del estudio de las matemáticas*.

5. La “irresponsabilidad matemática” de los alumnos

Anexo B de *Estudiar Matemáticas* de Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón, SEP, México, 1998.

Hemos dicho que la interpretación de la “irresponsabilidad matemática” de los alumnos requiere, por una parte, relacionar este fenómeno con otros que aparecen asociados a él dentro del sistema escolar y, por otra, tomar en consideración aquellos elementos del *contrato didáctico*[‡] relacionados con la asignación de la responsabilidad matemática. A lo largo de nuestro análisis intentaremos explicar por qué el contrato didáctico vigente en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas mantiene estable la asignación exclusiva al profesor de toda la responsabilidad matemática, en lugar de evolucionar en el sentido de traspasar a los alumnos progresivamente una parte de dicha responsabilidad. Para ello empezaremos planteando cuestiones de carácter un poco más general que acabarán confluyendo en una primera interpretación de nuestro fenómeno. Abordaremos, en concreto, las siguientes preguntas: ¿cómo se considera el trabajo matemático personal del alumno en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje?; ¿qué papel se adjudica al profesor de matemáticas en las instituciones didácticas actuales?

Empezaremos enunciando un hecho bastante elemental relativo al trabajo personal del alumno:

Tradicionalmente no se ha tomado muy en serio el trabajo matemático concreto de los alumnos: de hecho nunca se le consideró como un “verdadero” trabajo matemático.

Incluso en los documentos oficiales (que todavía podemos considerar como una representación bastante fiel del punto de vista tradicional en didáctica), se guarda un discreto silencio respecto al mismo. Cuando se evoca la necesidad de que el alumno realice cierta actividad para poder seguir con normalidad la marcha del curso, nunca se supone que esta actividad del alumno en cuanto *estudiante de matemáticas* tenga una estructura compleja ni, mucho menos, constituya un objetivo en sí misma.

Así, por ejemplo, puede mostrarse que las instituciones didácticas actuales no otorgan demasiada importancia a las *producciones matemáticas escritas* que realiza el alumno en su cuaderno, por lo que es muy difícil que el propio alumno las tome en serio. Se acepta entonces como “normal” la existencia de errores graves en dicho cuaderno y que no se pretenda enseñar a los alumnos a escribir matemáticas (redacción de definiciones

[‡] El *contrato didáctico* es una de las opciones fundadoras de la didáctica fundamental. Puede considerarse formado por el conjunto de cláusulas que, de una manera más o menos implícita, rigen, en cada momento, las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que concierne al conocimiento matemático enseñado. Pero, en realidad, el contrato didáctico como noción teórica sólo toma un sentido preciso en el marco de la teoría de situaciones de Guy Brousseau (ver Brousseau, 1986). En el Anexo D de la Unidad 3 volveremos sobre esta noción.

sencillas, utilización correcta de los símbolos matemáticos, redacción detallada de la solución de un problema, etc.).

En el *discurso psicopedagógico* que domina nuestra cultura escolar, se considera el *aprendizaje escolar* como objetivo último de la acción educativa. El análisis se centra en lo que el profesor debe hacer para favorecer el aprendizaje de los alumnos, un aprendizaje que se traduzca en adquisiciones significativas y en interés por la materia. En cambio, nunca se considera necesario un análisis detallado del proceso de estudio del alumno, es decir, del trabajo matemático que éste realiza, considerado como un objetivo en sí mismo.

En coherencia con la *opacidad del trabajo matemático del alumno* que este punto de vista comporta, la actividad de estudio del alumno se concibe siempre de forma bastante uniforme y relativamente independiente de las materias a estudiar. Se tiende a considerar a la enseñanza como un instrumento para potenciar el *desarrollo de las estructuras cognitivas* de los alumnos y, en este sentido, el estudio que éstos deben realizar (entendido como un medio auxiliar de la enseñanza) no depende demasiado de la materia particular estudiada.

Podríamos resumir la forma como se interpreta el estudio en nuestra cultura escolar en tres puntos:

- (i) Se ignora *la estructura y las funciones del trabajo matemático del alumno*. El *proceso de estudio* se considera más como una actividad privada y subjetiva del alumno que como un trabajo objetivable y analizable.
- (ii) La actividad de estudio tiende a ser considerada *relativamente independiente de la materia a estudiar*.
- (iii) Se interpreta *el estudio del alumno* como *un medio auxiliar de la enseñanza escolar*. Nunca se concibe la actividad matemática del alumno como el objetivo principal del proceso didáctico en función del cual se instaurarían diferentes medios y dispositivos didácticos —entre los que figurarían los dispositivos escolares junto a otros—.

Esta forma de interpretar el *estudio* está relacionada con la "enfermedad didáctica" de la que se hablaba en los diálogos, y acarrea importantes consecuencias sobre el funcionamiento de las actuales instituciones escolares. La primera de estas consecuencias, y quizá la más llamativa, puede ser descrita como:

La concentración en el aula de las actividades matemáticas del alumno y la mutua dependencia alumno-profesor.

La primera manifestación de este fenómeno es el hecho siguiente: en todos los niveles educativos *la utilización de un libro de texto* en el sentido de punto de referencia "externo" (tanto para los alumnos como para el profesor) que marque el contenido matemático del curso, es prácticamente inexistente. El alumno sólo dispone de lo que se hace en clase, de los apuntes que logra tomar y de los materiales que le entrega incidentalmente el profesor. El libro de texto (si existe) y, en su caso, los libros de consulta tienen una función claramente auxiliar del trabajo escolar propiamente dicho. Lo anterior comporta que el alumno dependa absolutamente del profesor y, recíprocamente, que sobre el profesor recaiga toda la responsabilidad del aprendizaje matemático del alumno.

Actualmente, esta situación puede verse avalada e incluso reforzada por ciertas interpretaciones de lo que es el "currículum abierto": la insistencia en la autonomía de los centros para elaborar su propio proyecto educativo podría provocar un refuerzo de la

dependencia cada vez más exclusiva del trabajo del alumno respecto de la institución escolar y, en particular, de cada profesor concreto. En efecto, si se hace creer al profesor que él es el responsable último de las adaptaciones curriculares elaboradas para sus alumnos y que es él quien decide los contenidos matemáticos a enseñar y, además, se hace recaer exclusivamente sobre sus espaldas la responsabilidad de la evaluación de los alumnos (con la eliminación progresiva de las evaluaciones externas) entonces se estaría aumentando la dependencia mutua profesor-alumno. Una consecuencia inmediata de esta situación es la siguiente:

En las instituciones docentes actuales se adjudica al profesor un papel desmesurado en el proceso didáctico.

Se ha hecho creer al profesor que él es la pieza fundamental del sistema educativo y que de su voluntad y su formación depende el funcionamiento del sistema y el éxito de cualquier reforma educativa.

Él es el encargado de conseguir que el alumno tenga una *actitud positiva* y la *motivación* necesaria para aprender matemáticas, al tiempo que éstas (actitud y motivación) son consideradas las condiciones básicas de todo aprendizaje.

En resumen, se acepta que el resultado del aprendizaje del alumno depende esencialmente de la instrucción que imparte el profesor. Correlativamente, y dada la opacidad del proceso de estudio del alumno, el profesor sólo puede pretender modificar la enseñanza que él imparte para intentar mejorar el aprendizaje. El profesor no puede ni siquiera plantearse la posibilidad de incidir sobre el proceso de estudio del alumno, porque es un proceso al que no tiene acceso en absoluto. Esta situación refuerza la ilusión de que la enseñanza formal abarca todo el proceso didáctico.

Paralelamente, y en concordancia con esa omnipotencia adjudicada al profesor, existe una creciente demanda social, culturalmente muy enraizada, que pide que los profesores pasen de enseñantes del saber matemático a educadores o formadores de los alumnos. Esta demanda puede llevar incluso a una situación en la que se mira al profesor no sólo como educador sino incluso como reeducador de los alumnos con "necesidades educativas especiales".

Relacionada con la creciente dependencia mutua alumno-profesor aparece la cerrazón de ambos en el aula. El profesor no puede responder a las enormes demandas sociales que pesan sobre él, y el alumno, por su parte, sólo encuentra sentido a su actividad matemática dentro del aula porque ésta se le presenta como una actividad exclusivamente escolar.

Por otra parte, es muy significativo el hecho de que entre las demandas a las que están sometidos profesor y alumno, muy pocas les requieren como matemáticos; las únicas necesidades matemáticas que profesor y alumno deben satisfacer son necesidades de origen didáctico. Así, tanto el alumno como el profesor se ven llevados a ignorar la existencia de necesidades matemáticas de índole no didáctica, con el consiguiente riesgo de caer en lo que la Profesora llama la *enfermedad didáctica*.

En síntesis, el alumno realiza un trabajo que nadie considera ni exige que sea un verdadero trabajo matemático; se trata de un trabajo tomado como un auxiliar del aprendizaje escolar, concentrado en el aula y absolutamente dependiente de un profesor al didáctico.

En esta situación es muy difícil que el contrato didáctico evolucione en la dirección de traspasar a los alumnos una parte de la responsabilidad matemática asignada en exclusiva al profesor. Por el lado del alumno, esta asunción de responsabilidad viene dificultada por la forma en que el sistema considera y lleva al alumno a considerar el trabajo matemático de éste, así como por la centración en el aula del mismo y su dependencia absoluta del profesor. Por el lado del profesor, es muy difícil que el contrato didáctico evolucione en la dirección de usurparle al profesor la *única* responsabilidad matemática que actualmente le asigna.

Referencias

BROUSSEAU, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", in BRUN, J. (1996). *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, pp. 45-143.

6. El Número Pi de Wislawa Szymborska

Poesía no completa de Wislawa Szymborska, FCE, México, 2002.

Digno de admiración el número pi
tres punto uno cuatro uno
Todas sus demás cifras también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No se deja abarcar *seis cinco tres cinco* con la mirada,
ocho nueve con un cálculo
siete nueve con la imaginación
o incluso *tres dos tres ocho* con una broma es decir una comparación
cuatro seis con nada
dos seis cuatro tres en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra se interrumpe después de algunos metros.
Lo mismo pasa, aunque un poco después, con las serpientes de los cuentos.
El cortejo de cifras de que se forma pi
no se detiene en el borde de la página,
es capaz de continuar por la mesa, por el aire,
la pared, una hoja, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
y por toda esa expansión e insondabilidad celestiales
¡Ay qué corta, ratonescamente corta es la trenza del cometa!
¡Qué débil el rayo de la estrella, que en cualquier espacio se curva!
Y aquí *dos tres quince trescientos diecinueve*
mi número de teléfono tu talla de camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
el número de habitantes sesenta y cinco centavos
centímetros de cadera dos dedos código charada,
en la que a donde irá veloz y fatigada
y se ruega mantener la calma



y también la *tierra pasará, pasará el cielo*,
pero no el número π , eso ni hablar,
seguirá con un buen *cinco*,
con un *ocho* de primera,
con un *siete* no final,
apurando, ay, apurando a la holgazana eternidad para que continúe.

Wisława Szymborska

7. Problemas por resolver, problemas por demostrar y Problemas de rutina George Polya

Como plantear y resolver problemas de George Polya, Editorial Trillas, México, 1987.

Problemas por resolver, problemas por demostrar. Nos proponemos establecer un paralelismo entre estos dos tipos de problemas.

1. El propósito de un "problema por resolver" es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema.

La incógnita recibe también el nombre de "quaesitum", o lo que se busca, o lo que se pide. Los "problemas por resolver" pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; son problemas serios o simples acertijos. Podemos buscar incógnitas de todo tipo, tratar de encontrar, de obtener, de adquirir, de producir o construir todos los objetos imaginables. En una novela policíaca, la incógnita es el asesino; en el ajedrez, una jugada; en ciertos enigmas, una palabra; en ciertos problemas elementales de álgebra, un número; en una construcción geométrica, una figura.

2. El propósito de "un problema por demostrar" consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada,

Un testigo que afirme que el acusado se hallaba en casa cierta noche, obliga al juez a investigar si dicha afirmación es verdadera y a justificar su opinión sobre bases tan sólidas como sea posible. Se trata, para el juez, de un "problema por demostrar". La "demostración del teorema de Pitágoras" constituye otro de esos problemas; pero aquí no decimos "demostrar o refutar el teorema de Pitágoras". Quizá fuese mejor, bajo ciertos aspectos, incluir en el enunciado del problema la posibilidad de refutarlo, pero la descartamos a conciencia dado que las posibilidades de refutar el teorema de Pitágoras son mínimas.

3. Los principales elementos de un "problema por resolver" son, la *incógnita*, los *datos* y la *condición*.

Si tenemos que construir un triángulo de lados a , b , c , la incógnita es un triángulo, los datos son las tres magnitudes a , b y c y la condición es que los lados del triángulo por construir tengan, respectivamente, esas magnitudes. Si tenemos que construir un triángulo cuyas alturas son a , b y c , la incógnita es un objeto de la misma categoría que el anterior, los datos son los mismos, pero la condición que relaciona la incógnita con los datos es diferente,

4. Si un "problema por demostrar" es un problema matemático de la forma más usual, sus elementos principales son la *hipótesis* y la *conclusión* del teorema que hay que demostrar o refutar.

"Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales, las dos diagonales son perpendiculares entre sí," La segunda parte de la frase es la conclusión, la primera, que empieza por "si", es la hipótesis,

[No todos los teoremas de matemáticas pueden escindirse tan fácilmente en hipótesis y conclusión, No es posible, por ejemplo, en el siguiente caso: "Existe una infinidad de números primos,"]

5. Para encontrar la solución de un "problema por resolver" hay que conocer, de modo preciso, los elementos principales, incógnita, datos y condición, Nuestra lista contiene numerosas preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos.

¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?

Distinga las diversas partes de la condición.

Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.

Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.

No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra; ¿en qué medida la incógnita queda entonces determinada?; ¿cómo puede variar?

¿Puede deducir de los datos algún elemento útil?; ¿podría pensar en otros datos que le permitiesen determinar la incógnita?; ¿podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?

¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha utilizado la condición por completo?

6. Si tiene que resolver un "problema por demostrar" debe conocer exactamente sus partes principales, hipótesis y conclusión, Existen a propósito de dichos elementos preguntas y sugerencias útiles correspondientes a las de nuestra lista que están especialmente adaptadas a los "problemas por resolver",

¿Cuál es la hipótesis?; ¿cuál es la conclusión?

Distinga las diversas partes de la hipótesis.

Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.

Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o una similar.

No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿sigue siendo válida la conclusión? ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?; ¿podría pensar en otra hipótesis de la cual usted pudiera deducir fácilmente la conclusión?; ¿podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión, estuviesen más relacionadas entre sí?

¿Ha empleado la hipótesis completa?

7. "Los problemas por resolver" tienen mayor importancia en las matemáticas elementales, los "problemas por demostrar" son más importantes en las superiores. En la presente obra se insiste particularmente sobre los "problemas por resolver", pero el autor espera restablecer el equilibrio y tratar en otra ocasión el tema de modo más completo.

Problemas de rutina. Así podemos calificar el problema que consiste en resolver la ecuación

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

a condición de haber explicado previamente la solución general de la ecuación de segundo grado de manera que el alumno sólo tiene que sustituir las letras que figuran en la solución general por los números 1, -3 y 2. Aun en el caso de que la explicación general no se hubiese dado en términos algebraicos, bastaría resolver una media docena de ecuaciones de

segundo grado semejantes, con coeficientes numéricos para que el problema propuesto fuese "de rutina". En general, consideramos dentro de esta categoría todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo. Al proponer un problema de rutina, el profesor ofrece a los alumnos una respuesta inmediata y decisiva a la pregunta: *¿Conoce algún problema relacionado?* Los alumnos no necesitan entonces más que un poco de atención y paciencia para seguir un precepto experimentado y no tendrán oportunidad de recurrir ni a su juicio ni a sus facultades inventivas.

Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de matemáticas, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar la enseñanza de las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarlas por debajo del nivel de un "libro de cocina" ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa.

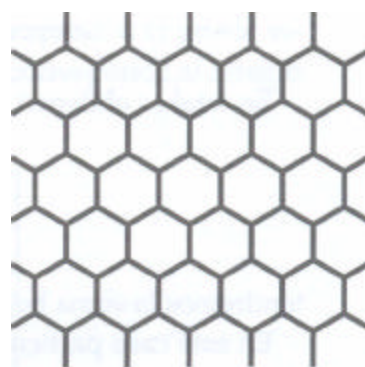
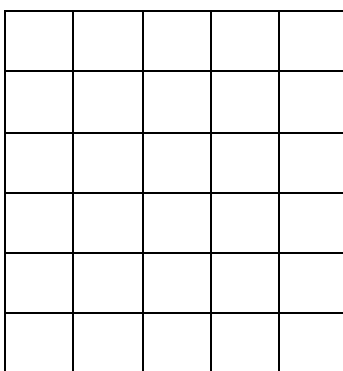
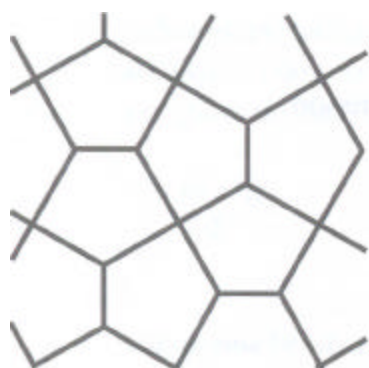
Teselaciones, o cómo decorar el baño*

Juan Manuel Ruisanchez Serra

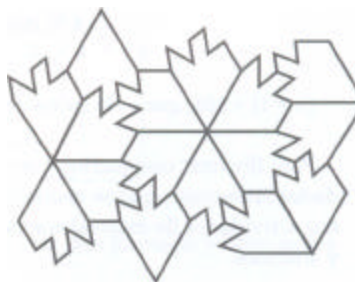
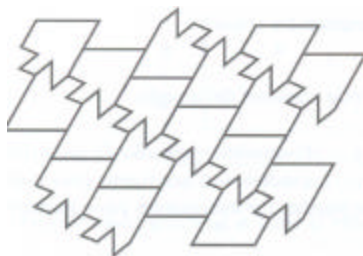
Ésta, como casi todas las historias, es una historia del mundo. Sólo que esta historia es viejísima, pero viejísima en serio, de cuando el mundo era sólo una idea y de cuando sólo existía un mundo matemático.

Quizás se pregunten que tiene que ver eso con la decoración de los baños, pero no se desesperen que luego lo descubrirán.

Yo era un *teselador*, pero no me gustaba el nombre de mi oficio, así que todos me conocían como el *decorador de planos infinitos*. Sí, hay una leve diferencia entre *teselador* y *decorador de planos infinitos*: el primero, lo único que tiene que hacer es encontrar figuras con las que se pueda cubrir un plano infinito sin que las figuras se amontonen y sin que queden huecos en el plano; el segundo, además de eso, busca que las figuras sean bonitas o interesantes. Por ejemplo, un *teselador* haría estas teselaciones:



mientras que un decorador haría estas:



Era un mundo divertido. Y aunque a muchas personas les sorprende saber que en el mundo de la matemática había muchísimos chismes y rumores, así era. De hecho, esta historia se trata de un rumor que

circulaba por todas partes: un poderosísimo ente, Don Dios, estaba planeando crear el *Universo* y el Demonio electo de la matemática quería darle algunas sugerencias. También se decía que, como todos los entes poderosísimos de entonces, Don Dios no aceptaba fácilmente las sugerencias de los demás, así que el Demonio tenía un plan. Y aquí es donde yo entro en escena

Una mañana, mientras trabajaba tranquilamente en mi taller, recibí esta carta:

Queridísimo señor:

Supongo que habrá escuchado el extendido rumor sobre la creación del Universo. Ruego a usted se ponga a mi servicio para llevar a cabo un plan. Necesito su ayuda y la de su noble oficio; sírvase visitarme mañana en mi palacio y traiga con usted un catalogo de su trabajo. Mi plan le será informado a usted personalmente.

Atentamente

DM

Tal como indicaba la carta, me presenté en el majestuoso palacio a la mañana siguiente con mi *Catálogo de planas*. La verdad es que no entendía para qué necesitaría un *teselador* para su plan, pero preferí esperar a ver (no estaba segura de que el Demonio estuviera al tanto de aquello de *diseñador*).

Fuimos directo a los negocios:

-Me gustaría ver su catalogo.

-Si, claro. Aquí lo tiene:

(3^6) ; (4^4) ; (6^3) ; $(3^4, 6)$; $(3^3, 4^2)$; $(3^2, 4, 3, 4)$; $(3, 4, 6, 4)$; $(3, 6, 3, 6)$; $(3, 12^2)$; $(4, 6, 12)$; $(4, 8^2)$...

El Demonio se me quedó viendo con cara de "¿Y bien?"

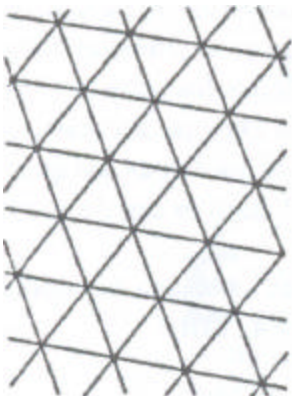
-¿Algún problema?

-Si, me parece que usted no entiende. Le pedí planas con figuras, no paréntesis con números.

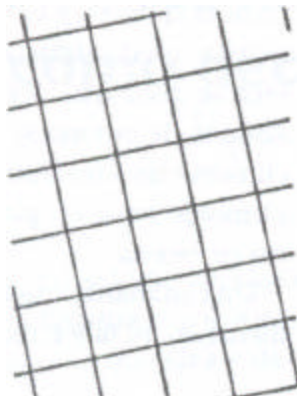
-No, no, no; esos números son tan sólo notación; pensé que ya la conocería.

-El hecho de ser el Demonio electo de la matemática no implica que sepa todo. Yo me dedico a la teoría del caos en funciones contractoras, así que preferiría ver los planas, no la notación.

-De acuerdo, aquí están los diseños:



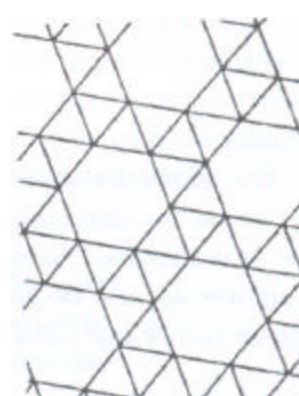
(3^6)



(4^4)



(6^3)



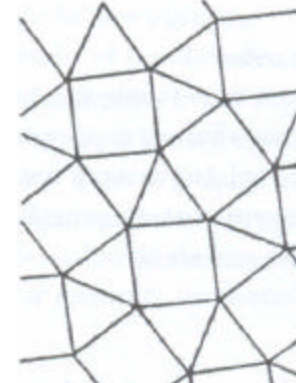
$(3^4.6)$



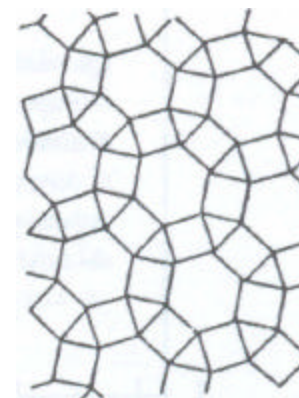
$(3^4.6)$



$(3^3.4^2)$



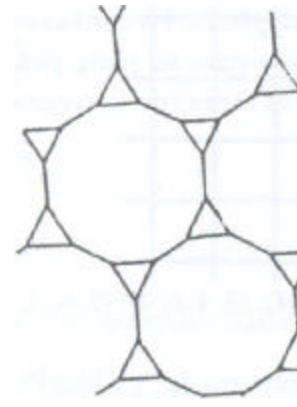
$(3^2.4.3.4)$



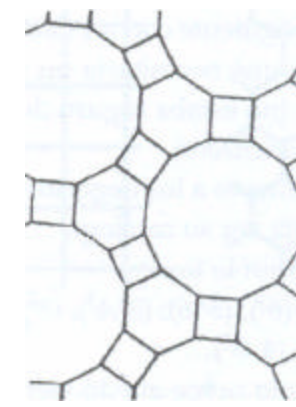
$(3.4.6.4)$



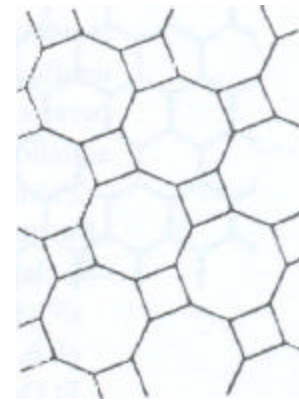
$(3.6.3.6)$



(3.12^2)



$(4.6.12)$



(4.8^2)

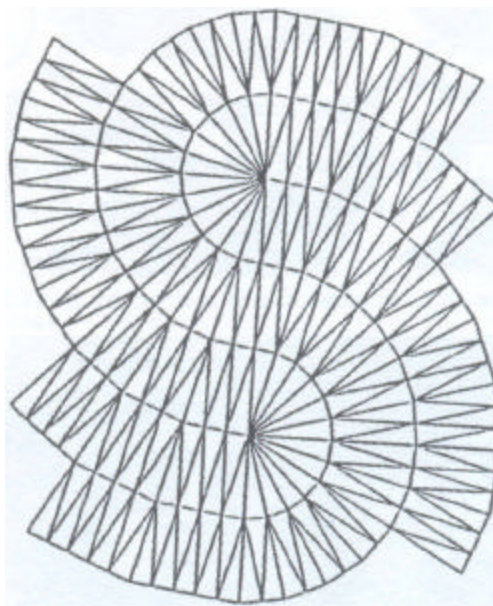
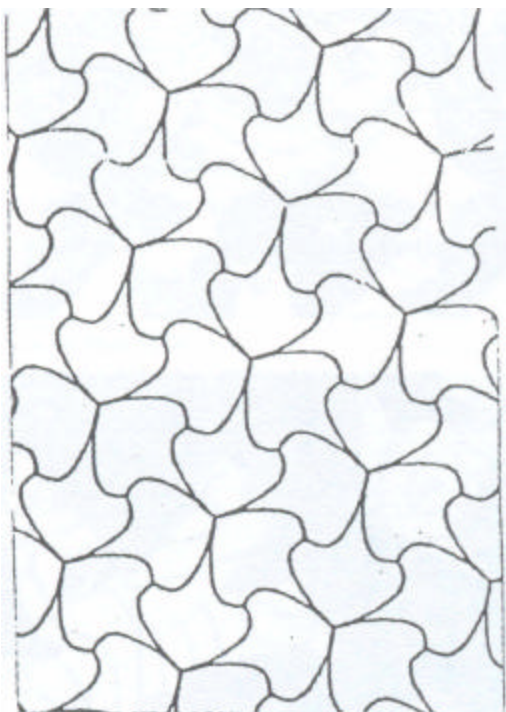
-¿Que es esto?

-Son los diseños. Por ejemplo, (3^6) quiere decir que en cada vértice hay 6 triángulos; o, en otro ejemplo mas complicado $(3^2, 4, 3, 4)$ quiere decir que en cada vértice hay 2 triángulos, 1 cuadrado, 1 triángulo y 1 cuadrado, como se ve en el diseño marcado por $(3^2, 4, 3, 4)$. Es decir, la notación indica cómo se acomodan las figuras alrededor de cada vértice para sumar 360° y que no se amontonen alrededor de ningún vértice, pues, además, todos los vértices son iguales y. . .

-Sí, sí, sí; eso ya lo vi, pero le dije planos, y quería decir planos infinitos, grandotes, inacabables, etcétera, no estos rectangulitos.

-No se enoje y déjeme explicarle: éstas son sólo las muestras, pues cargar los planos completos es muy incómodo y muy poco discreto. Pero no se preocupe, con esos dibujos se pueden llenar planos infinitos, pues todos los vértices son iguales y por lo tanto los dibujos se pueden ir *pegando* uno a otro infinitamente; confié en mí. ¿Que le parecen?

-Bueno, ya sabe, aquí todos conocemos los chismes y rumores de los demás y justo por eso lo llamé a usted, porque dicen por ahí que mas que teselar los planos su trabajo es decorarlos ¿es verdad?



-Sí, así es, sólo que no sabia que eso es lo que quería. Aquí tengo algunas muestras:

-Estos me gustan más, sobre todo sin tanta suma de ángulos y teorías.

-No crea, estos diseños necesitan mas cuidado en la teoría y detrás también hay algunas sumas de ángulos y uso de polígonos; pero eso no importa. ¿Qué le parecen?

Se quedó pensando un momento y luego me dijo:

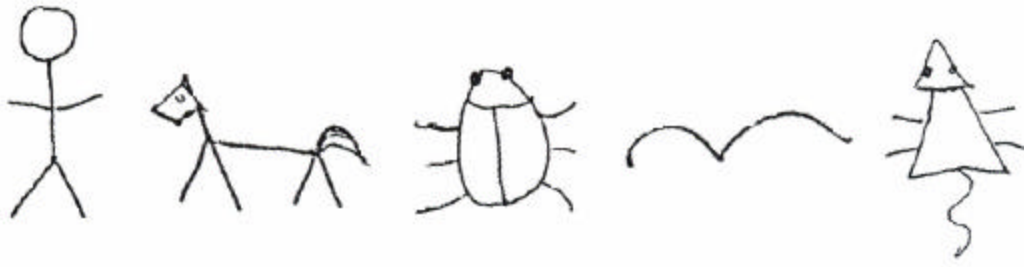
-Creo que lo mejor será contarle mi plan, aunque seguro ya habrá oído al respecto. Don Dios quiere crear el *Universo* y quiere incluir unos *seres vivos* en él. Lo que yo quiero es sugerirle la forma de los *seres vivos*. Pero seguro que ha oído del carácter de Don Dios: no acepta sugerencias; así que quiero hacer las sugerencias de un modo subliminal.

-Aun no entiendo que tengo que hacer yo.

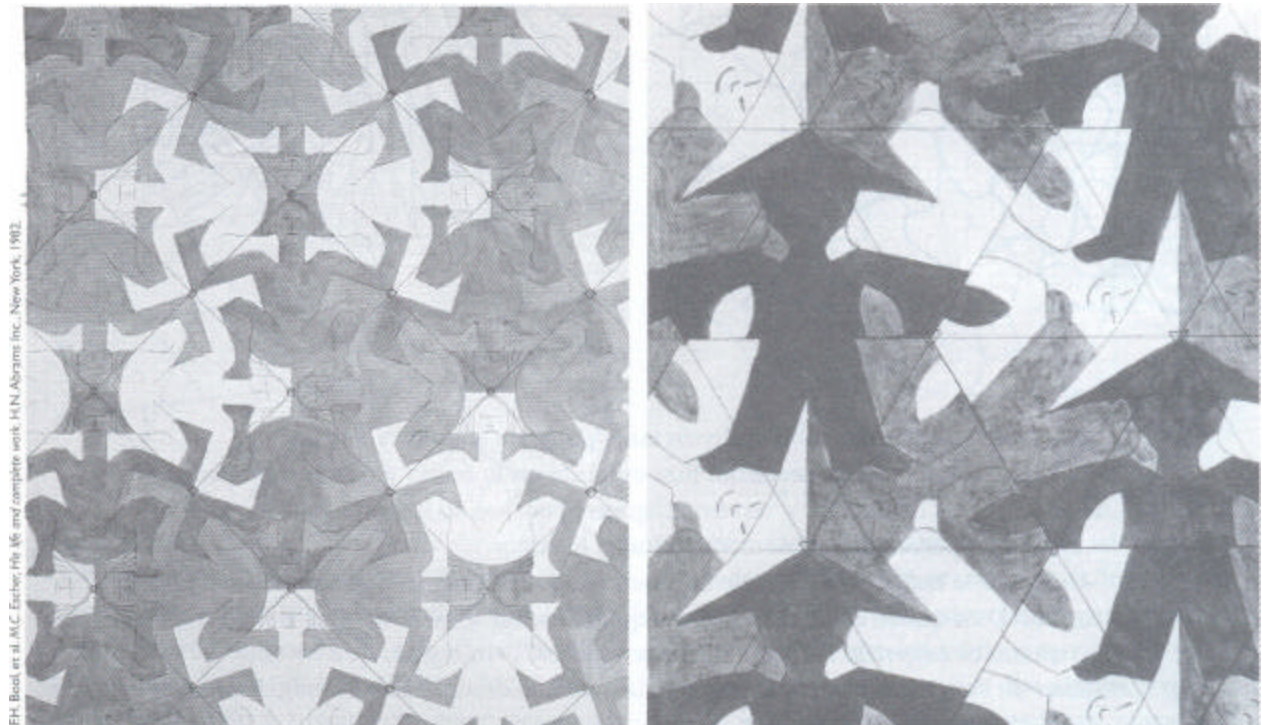
-Mire, yo invitaré a cenar a Don Dios y en la cena incluiré algún purgante o algo parecido para que después tenga que ir varias veces al baño, ¿entiende? Su trabajo será realizar la decoración de mis tres baños. Son cuartos como cualquier otros, solo que infinitos. Es decir, diseñará 18 planos infinitos: 4 paredes, el techo y el piso de cada baño. El diseño incluirá mis ideas para los *seres vivos*.

-Esta bien, pero necesito saber cuales son sus ideas para los diseños.

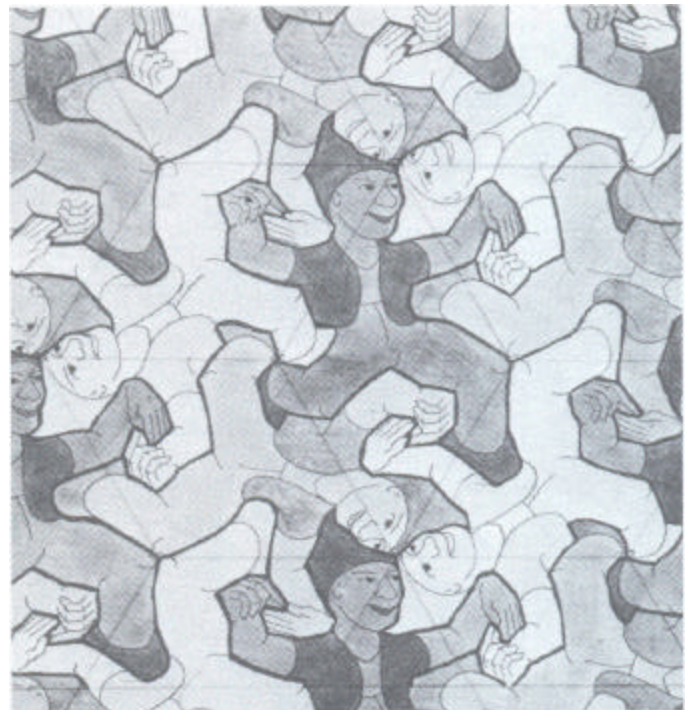
-Claro. Son cosas como éstas:



-Bueno, ya le dije que yo me dedico al caos y no a dibujar, pero ese es su trabajo.
Poco tiempo después regresé al palacio con los diseños listos.



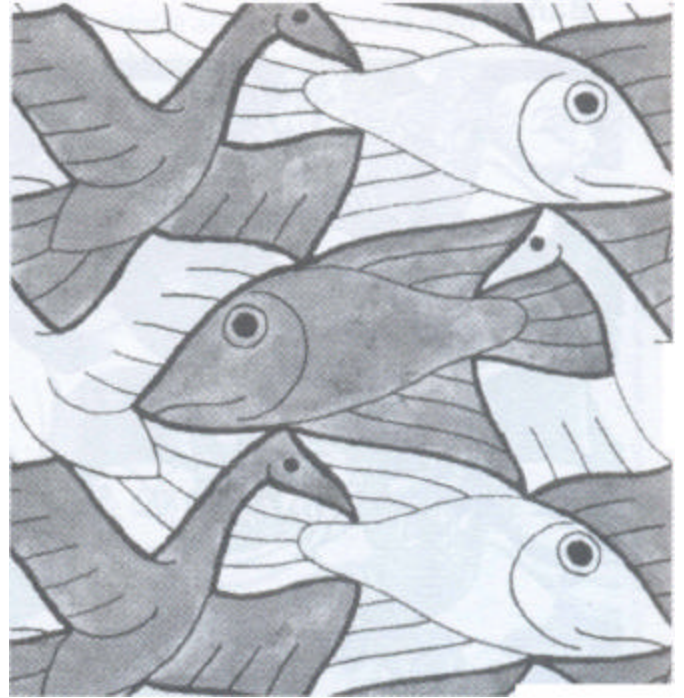
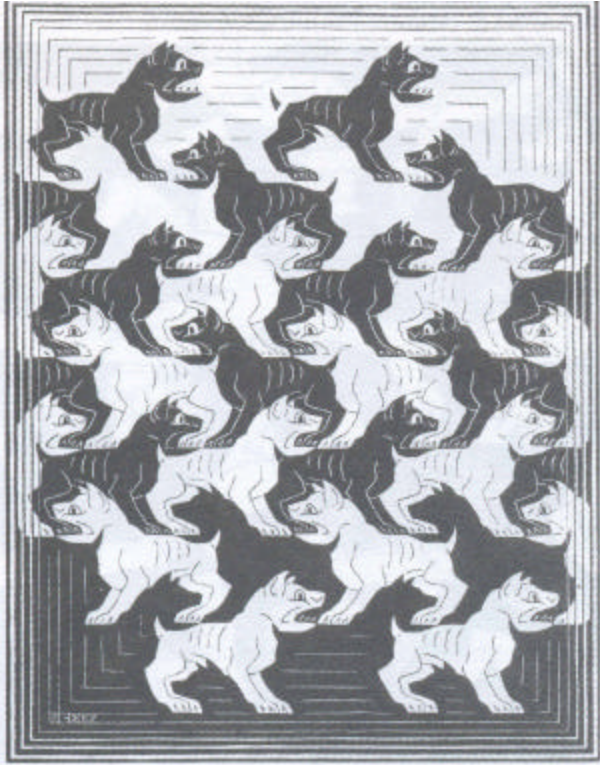
BAÑO I



M. C. Escher. Uno de sus primeros estudios sobre la división regular del piano. 1936.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del piano con figuras humanas. 1936.

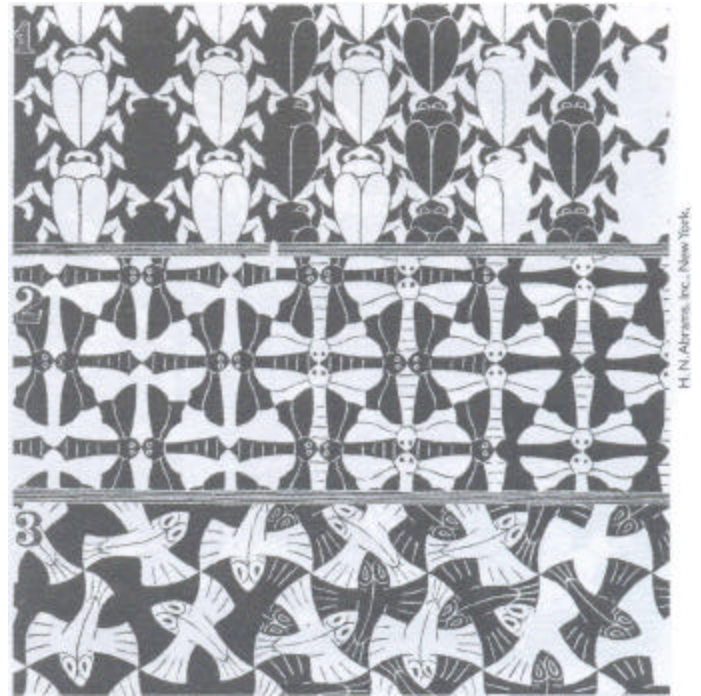
BAÑO 2



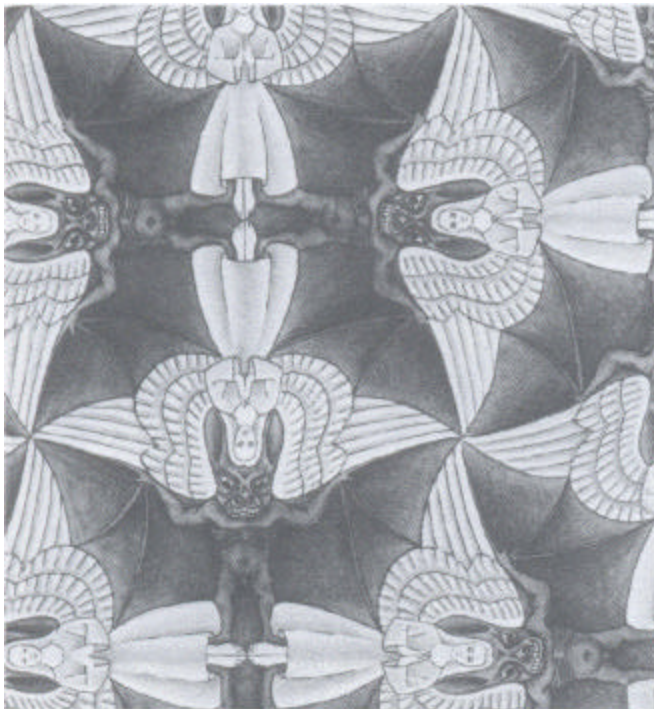
M. C Escher. Estudio de la división regular del plano con aves y peces. 1938.



BAÑO 2



BAÑO 3

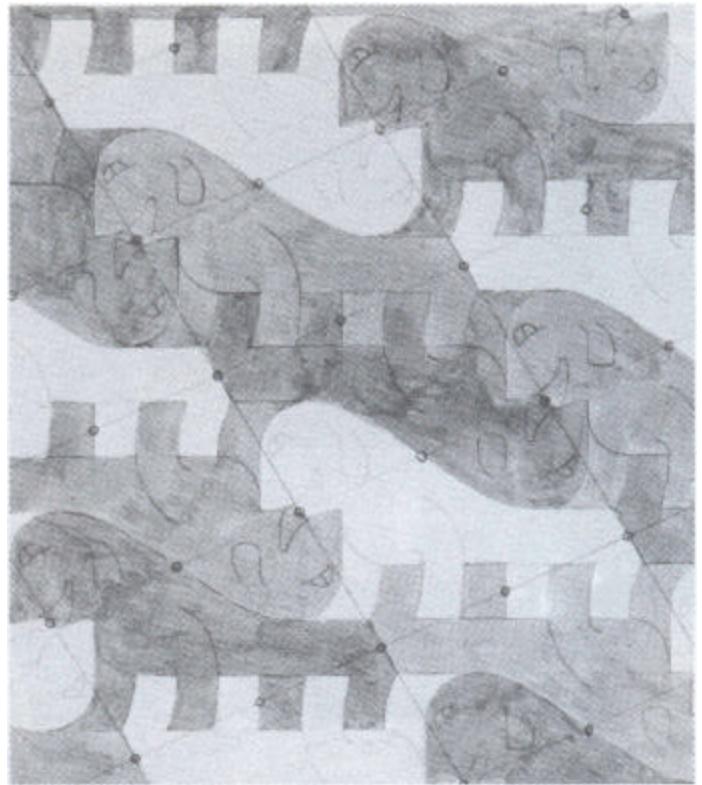
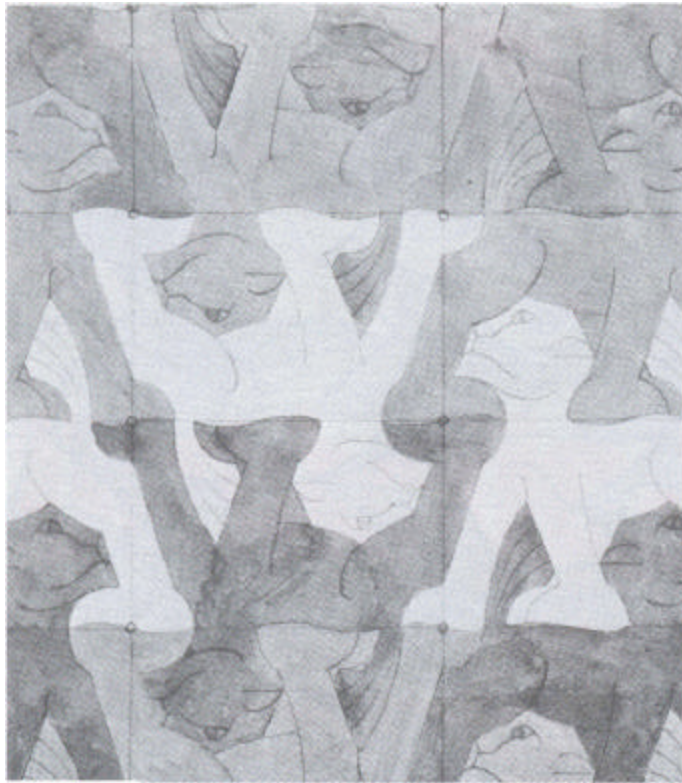


BAÑOS 3



M. C. Escher. Sol y luna. 1948.

División regular del plano



-Me encantan. ¿Cuándo tendrá los planos completos?

-Los tendré mañana mismo, sólo es cuestión de repetir las mismas imágenes teniendo cuidado de que empalmen bien y llenar el plano con ellas, no hay ningún problema.

-De acuerdo, muchísimas gracias.

-De nada. Espero que su plan funcione.

Al día siguiente llevé los planos terminados y la cena se realizó tres noches después.

Cuentan los rumores que Don Dios tuvo que visitar al menos cinco veces cada uno de los baños del palacio y que hubo dos planos que le gustaron especialmente y que por ellos creó tantos *seres vivos* como éstos, pero nunca me dijeron cuáles eran.

Otro rumor es que seis días después de aquella cena, el *Universo* ya había sido creado (aunque eso sí que no me lo creo...). Como el Demonio electo de la matemática vio que su plan y mis planos habían surtido efecto y los *seres vivos* eran como él había planeado, me recompensó trayéndome aquí para poder ver mis creaciones.

Lecturas en video

Nota: Los videos de esta sección pueden consultarse en la sección de lecturas en video del disco compacto.

1. Un Argumento circular

Trata de una investigación para determinar el origen de los círculos que aparecen en los campos de cultivo en Inglaterra.

Conceptos utilizados, circunferencia, elipse, centro geométrico, medición de radios.

2. El mismo de nuevo

Trata de cómo ayudan las propiedades de traslación y rotación al diseño de un edificio y el análisis de un cuadrado con la figura que se forma uniendo los puntos medios de sus lados. Se utilizan áreas, formas, puntos medios, rotaciones, traslaciones

3. Costo de los discos compactos

El video trata de un análisis de lo que le cuesta a una empresa producir los discos compactos de un grupo de rock y el análisis que le ayuda a determinar cuál es cantidad de discos que debe vender para obtener ganancias.

Uso de rectas, sistemas de ecuaciones lineales.

4. Encontrando el camino

Muestra el sistema de calles y avenidas de Nueva York, la forma de utilizar un mapa para encontrar una dirección en Londres y un concurso escolar en el que se debe llegar primero a un cierto lugar contando cada equipo con indicaciones diferentes.

5. Una exhaustiva averiguación

Trata de un estudio matemático utilizado para reducir la contaminación en la ciudad de los Ángeles California.

6. Reducir a escala

Se trata de cómo se utiliza la escala en el diseño arquitectónico y en la comparación de edificios, además se explica el concepto de escala y como interpretarla.

7. Rescate

Se trata de calcular la trayectoria de un barco utilizando coordenadas sobre mapas por medio de referencias como latitud, longitud y la determinación del punto de cruce de dos trayectorias.

Se utilizan mapas, brújula, cartas marinas, medición de distancia y trayectoria en un mapa, cruce de trayectorias, margen de error.

8. Una gran salto

Trata de cómo utilizar el análisis matemático particularmente sobre una parábola para mejorar el desempeño de un atleta.

Autoevaluaciones

6. Autoevaluaciones

Introducción

Ya sabemos de qué se trata la autoevaluación: Comprobar uno mismo su avance en la adquisición de conocimiento y habilidades. Y esto de la evaluación no podía faltar en este material.

La autoevaluación no es algo que desconozcamos. Cuando aprendimos a andar en bicicleta o en patines no fue necesario que alguien nos dijera que ya lo habíamos logrado. Cuando todavía nos caíamos y sufríamos uno que otro raspón, sabíamos dos cosas: una, todavía no lográbamos dominar el arte de andar sobre ruedas y, la segunda, para lograrlo debíamos seguir practicando.

Hay ocasiones en que nuestra autoevaluación es complaciente. Encontramos motivos para justificar nuestras deficiencias y en lugar de trabajar para superarlas, nos paralizamos con la justificación que damos.

También llega a ocurrir que en la escuela la autoevaluación queda casi olvidada. Tal vez el saber que periódicamente debemos ser evaluados por nuestros profesores nos lleva a olvidarnos de la evaluación propia. Pero si lo que aprendemos en la escuela nos va a ser útil para nuestras diversas actividades dentro y fuera de ella, la autoevaluación es necesaria, pues de otra forma siempre estaremos esperando hasta que alguien nos diga que ya somos competentes en algo para atrevernos a usarlo. Lamentablemente esto pasa con cierta frecuencia en matemáticas. Esperamos que el profesor nos diga no sólo que ya dominamos un tema sino además cuándo podemos usarlo.

En este material te proporcionamos por cada unidad un cuestionario para que te sirva como autoevaluación. No es, desde luego, la única forma de autoevaluarte, tú mismo puedes diseñar otras. De este cuestionario se dan las respuestas para que las compares con las tuyas.

Unas observaciones finales sobre estos cuestionarios:

- No los desperdicies intentando trabajarlos antes de que hayas concluido el estudio de una unidad.
- No resuelvas por partes cada cuestionario. Cuando decidas resolver uno de ellos es porque dispones del tiempo y condiciones necesarias para resolverlo completo.
- No consultes la respuesta una por una, justo cuando acabas de resolver o responder lo que se te pide, termina el cuestionario y luego compara los resultados.
- Trata de no ser complaciente cuando encuentras errores en tus respuestas. No basta que digas que ya te diste cuenta de tus errores. Es necesario que sigas trabajando y confirmar al hacerlo o practicarlo que ya lograste adquirir los conocimientos o habilidades requeridas.

Además de una evaluación por cada unidad, incluimos una muestra de exámenes ordinarios y extraordinario de algunos CECyT para que tengas una idea del tipo de preguntas que suelen aparecer en el examen ordinario que representa el 60% de cada calificación ordinaria. El examen extraordinario representa la calificación del curso y sustituye el promedio de las calificaciones de los períodos ordinarios si es mayor que este promedio.

Autoevaluación de la Unidad 1

1. Escribe un ensayo breve sobre los sistemas de coordenadas. Incluye por lo menos un mapa conceptual.

2. Localiza los siguientes puntos en un mismo sistema de ejes coordenados

A (3, 1); G (-5, 3); N (-2, -3); U (0, 2); V (0, -5); R (-3, 0); Q (3, -2); B (4, 0);

H (0.68, -2.7); I (-3.98, 2.6); P (4, -1); L (2/3, 0); C (8/3, 3); M (-3/4, -1/8);

K (-2/3, 0); P $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

3. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la abscisa de un punto sobre el eje y?
- b) ¿Cuál es la ordenada de un punto sobre el eje x?
- c) ¿Es posible que la abscisa de un punto sea igual a su ordenada?
- d) ¿Existe un punto tal que su ordenada sea el doble a su abscisa?
- e) ¿Cuál es el punto cuadrante II que dista 4 unidades del eje y, 5 del eje x?
- f) ¿Cuál es el punto del cuadrante IV que esta a tres unidades del eje x, y a 5 del eje y?

4. Encuentra la distancia entre cada par de puntos.

- a) A (2, 3); B (5, 4)
- b) R (0, 5); S (-3, 2)
- c) E (-2, 5); F (-3, 10)
- d) V (1/2, 0); W (2/3, 4/5)
- e) G $(-\sqrt{2}, 3)$; H $(4, -\sqrt{3})$
- f) I $(-\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$; J $(1/\sqrt{3}, -\sqrt{2})$

5. Halla el perímetro de cada triángulo cuyos vértices son dados

- a) A (-1, 1); B (-1, 3); C (2, 5)
- b) A (-3, 4); B (-2, 4); C (-3, 1)
- c) A (-2/3, 1); B (4, 0); C (0, 1/5)
- d) A (-1/5, 2); B (3, 0); C (0, -3/7)

6. Verifica si cada triángulo es isósceles

- a) A (6, 2); B (2, -3); C (-2, 2)
- b) A (2, 1); B (2, 4); C (9, 3)

7. Halla el valor de x o y según sea dada la condición

- a) Si A (x, 3) equidista de B (3, -4) y C (2/5, 0)
- b) Si A (2, y) equidista de B (1/3, 2/5) y C (-3/5, 8/3)

8. Halla el punto sobre el eje x que equidiste de los puntos M (-3/8, 0) y N(2/5, -1/2)

9. Halla el punto sobre el eje y que equidiste de los puntos P (-2/5, 0); Q(3/8, 1/3)

10. En un sistema de coordenadas, bosqueja el lugar geométrico de cada una de las ecuaciones.

- a) $y - x = 0$ b) $x + y = 0$ c) $2x - 3y = 0$ d) $y - x^2 = 0$
 e) $y^2 - x = 0$ f) $xy - 1 = 0$ g) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ h) $3x^2 + 2y^2 = 5$
 i) $8y - x^3 = 0$ j) $x^2 - y^2 - 25 = 0$

11. Halla la ecuación del lugar geométrico, en el plano, de todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen las condiciones dadas:

- a) $P(x, y)$ equidista de $(0, -3)$ y $(4, 0)$
 b) $P(x, y)$ equidista de $(-2/3, 1/2)$ y $(5/4, 0)$
 c) La ordenada de $P(x, y)$ es el triple de su abscisa
 d) La abscisa de $P(x, y)$ es el doble de su ordenada
 e) La ordenada de $P(x, y)$ es el doble de la quinta parte de la abscisa
 f) $P(x, y)$ está al doble de $(-1, 5)$ que de $(3, 7)$
 g) La distancia de $P(x, y)$ al punto $(-1, 2)$ es 5
 h) La suma de las distancias de $P(x, y)$ a $(-2, 5)$ y $(0, 3)$ es 10
 i) La diferencia de las distancias de $P(x, y)$ a $(-3, 4)$ y $(-2, 0)$ es 8
 j) $P(x, y)$ equidista de $(1/2, 3)$ y del eje y
 k) $P(x, y)$ equidista de $(-2, 3/5)$ y del eje x

12. Encuentra las coordenadas de $P(x, y)$

- a) P es el punto medio del segmento que une los puntos $A(-2, 3)$; $B(-2, 3)$
 b) P divide al segmento AB de tal manera que $r = AP/AB = 3/5$ si $A(-3, 1)$ $B(2, -3)$
 c) P divide al segmento MN de tal manera que $r = MP/MN = 2/3$, si $M(-1/3, 0)$ y $N(2, -3/8)$
 d) P divide al segmento que une los puntos $A(2/3, 0)$ y $B(-1, 5/8)$ en una razón $r = AP/AB = 3/9$
 e) P divide al segmento que une los puntos $U(1/3, -4)$ y $V(3, 0)$ en una razón $r = UP/UV = 2/10$
 f) P es tal que $r = EP/EF = 0.25$; $E(-1, 2)$; $F(0, -5/9)$
 g) P es tal que $r = GP/GH = 0.40$; $G(-3, 5)$; $H(0, -2/3)$
 h) P es tal que $r = AP/AB = 1$; $A(-3, 5)$; $B(-1/2, 2)$
 i) P es tal que $r = BP/BC = 1$; $B(-2/3, 0)$; $C(-5, -3)$
 j) $r = AP/AB = -5/3$; $A(0, 1)$; $B(5, -2)$
 k) $r = MP/MN = -8/5$; $M(5, 0)$; $N(1, -2)$

13. Contesta las siguientes preguntas: (Supón que P es un punto que divide a un segmento dado, AB , de tal manera que $r = AP/PB$)

- a) ¿Qué significa que $r = 0$?
- b) ¿Qué significa que $r = 1$?
- c) ¿Dónde se localiza P si $r < 0$?
- d) ¿Dónde se localiza P si $r > 0$?
- e) ¿Qué significa que $0 < r < 1$?
- f) ¿Dónde se localiza P si $r = 1/2$?

14. Calcula el área de cada triángulo cuyos vértices son los que se indican:

- a) A (2, 0); B (-3, 5); C (3, 2)
- b) D (5, 0); E (-2, 3); F (6, 2)
- c) G (-1/3, 5); H (2/5, 1/2); I (0, 3/9)
- d) J (2/3, 0); K (-5/3, 1); L (4/7, -1/5)
- e) M ($\sqrt{2}$, 1); N (1, 3); O (2, 0)
- f) Q ($\sqrt{3}$, 1); R (2, 3); S (0, 5)

Autoevaluación de la Unidad 2

1. Contesta lo que se te pide.

- a) Una recta pasa por el punto (0, 3). ¿Cuál es su ordenada al origen?
- b) Una recta pasa por el punto (-5, 0). ¿Cuál es su abscisa al origen?
- c) La ecuación de una recta es $x - 2y + 3 = 0$. Calcula los valores de a y b
- d) La ecuación de una recta es $5x + 6y - 2 = 0$. Calcula los valores de a y b
- e) ¿Cuáles son los valores de a y b para una recta que cruza la parte positiva del eje x a 3 unidades del origen, y la parte negativa del eje y a 5 unidades del origen?
- f) ¿Cuáles son los valores de a y b para que una recta que cruza la parte negativa del eje x a 5 unidades del origen, y la parte positiva del eje y a 2 unidades del origen?
- g) En que punto cruza el eje y una recta cuya ecuación es $3x - 5y + 6 = 0$
- h) En que punto cruza el eje x una recta cuya ecuación es $2x - 5y - 8 = 0$
- i) Hallar a y b para la recta $3x = 2y$
- j) Hallar a y b para la recta $y = x$

2. Contesta lo que se te pide.

- a) Calcula la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es $\theta = 135^\circ$
- b) Calcula la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es $\theta = 120^\circ$
- c) Calcula el ángulo de inclinación de una recta cuya pendiente es $m = 5$
- d) Calcula el ángulo de inclinación de una recta cuya pendiente es $m = -5$
- e) ¿Cuál es la inclinación y pendiente de una recta horizontal?
- f) ¿Cuál es la inclinación y pendiente de una recta vertical?

3. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los 2 puntos.

- a) A(0, 1); B(3, 5) b) R(2, 3); S(2, 7) c) C(3, 0); D(4, 7)
 d) T(3, 2); U(3, 5) e) E(2/3, 1/5); F(0, 1/9) f) V(-1/2, 0); W(-1/2, 5)
 g) G(3/5, 2/7); H(1/7, 0) h) A(-3/5, 0); B(-3/5, 3) i) I(-1/2, 0); J(0, 3/5)
 j) M($\sqrt{2}$, 1); N(0, 2) k) P($\sqrt{3}$, 1); Q(0, 3) l) I(1/3, -1/2); J(2/3, -1/2)

4. Contesta cada pregunta

- b) ¿Pertenece el punto (-2, 3) a la recta $5x + 2y + 4 = 0$?
 c) ¿Pertenece el punto (4, -1) a la recta $8x + 3y - 1 = 0$?
 d) ¿Cuál es el punto de la recta $4x - 2y + 3 = 0$ que tiene su abscisa igual que 0?
 e) ¿Cuál es el punto de la recta $x + 3y - 7 = 0$ que tiene su ordenada igual que 0?
 f) El punto (x, 2) pertenece a la recta $6x - 3y - 1 = 0$. ¿Cuánto vale x?
 g) El punto (3, y) pertenece a la recta $8x + 2y + 5 = 0$. ¿Cuánto vale y?
 h) En la recta $2x - y - 5 = 0$, halla un punto cuya ordenada sea el triple de su abscisa
 i) En la recta $x + 5y - 6 = 0$, halla el punto cuya abscisa sea el doble de su ordenada
 j) En la recta $5x - 2y + 1 = 0$, halla un punto que tenga sus coordenadas iguales
 k) En la recta $6x + 3y - 5 = 0$, halla un punto que tenga sus coordenadas iguales

5. Halla la ecuación general de la recta y gráficala

- a) A(3, -5); B(-1, 0) b) A($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$); B(0, 1) c) D(4, -3); F(0, -5) d) A(1/2, 0); m = -3/5
 e) B(0, 4/9); m = -4/7 f) R(-2/3, 1/2); m = 2
 g) m = -2; b = -1 h) m = 1/3; b = 3/8 i) a = -1; b = -5
 j) a = -5/3; b = 8/7 k) $\theta = 40^\circ$; b = -1/2 l) B(3, 5); $\theta = 146^\circ$

6. Transforma cada una de las siguientes ecuaciones generales de las rectas a las formas: Pendiente-Ordenada al Origen y Simétrica.

- a) $x - 3y + 2 = 0$ b) $x - y + 2 = 0$ c) $7x - 20y - 5 = 0$ d) $5x + 4y - 22 = 0$

7. Halla la distancia de la recta al punto, dados:

- a) $5x - 12y + 3 = 0$ (-2, 1) b) $4x - 3y + 7 = 0$ (2, 3) c) $12x + 5y - 6 = 0$ (4, 6)
 d) $7x + 2y - 1 = 0$ (1, 5) e) $x + 5y + 3 = 0$ (1/2, 3/5) f) $8x - 2y + 3 = 0$ (1/2, 3)
 g) $4x + 3y + 5 = 0$ (3/4, 2/3) h) $3x + 2y - 6 = 0$ (2, 1/3)

8. Halla la distancia entre las dos rectas paralelas en cada caso

- | | | |
|----------------------|---|---------------------|
| a) $3x - 4y - 9 = 0$ | y | $3x - 4y + 3 = 0$ |
| b) $5x - y + 7 = 0$ | y | $5x - y + 9 = 0$ |
| c) $2x - 5y + 4 = 0$ | y | $4x - 10y - 14 = 0$ |
| d) $x - y - 16 = 0$ | y | $2x - 2y - 15 = 0$ |

9. Para cada par de rectas realiza lo siguiente:

Encuentra su intersección (si existe).

Determina si son perpendiculares o paralelas.

Si no son perpendiculares ni paralelas calcula el ángulo que forman.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| a) $x - y + 7 = 0$ | $x - y + 11 = 0$ |
| b) $3x + 2y - 6 = 0$ | $3x + 2y - 4 = 0$ |
| c) $4x - 5y + 1 = 0$ | $15x + 12y + 4 = 0$ |
| d) $6x + 2y - 5 = 0$ | $x - 3y + 8 = 0$ |
| e) $2x - y + 1 = 0$ | $x - 8y + 5 = 0$ |
| f) $2x + y - 3 = 0$ | $3x + 2y - 6 = 0$ |
| g) $8x - 9y + 5 = 0$ | $18x + 16y - 11 = 0$ |
| h) $3y + x = 1$ | $y - 3x = -2$ |
| i) $5x + 2y - 1 = 0$ | $10x + 4y + 3 = 0$ |
| j) $x + y + 1 = 0$ | $2x + 2y + 3 = 0$ |
| k) $x - y + 5 = 0$ | $2x - 3y + 10 = 0$ |
| l) $3x - 2y + 10 = 0$ | $x + y - 5 = 0$ |

10. Se desea cambiar la escala, de manera proporcional, del segmento de recta con medidas reales desde el punto $x = 450$ hasta el punto $x = 1050$ unidades de longitud, a otro segmento cuyos puntos extremos van desde el punto $x = 1$ a $x = 10$. Encuentra una función que convierta cualquier punto, con medida real, a otro punto con la nueva escala.

11. La temperatura medida en grados Fahrenheit es una función lineal de la temperatura medida en grados Celsius. 0°C equivalen a 32°F y 100°C equivalen a 212°F .

- Expresa los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.
- Si el termómetro marca 100 grados Fahrenheit, da su equivalencia en grados Celsius.

12. Un fabricante compra maquinaria con un valor de 20000 pesos que se deprecia linealmente hasta que su valor de venta es de 1000 pesos en 10 años.

- Expresa el valor de la maquinaria en función del tiempo.
- Determina en que momento la maquinaria no tendrá valor.

Autoevaluación de la Unidad 3

1. Escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro $C(h, k)$ y radio r se dan. Traza la circunferencia correspondiente

a) $C(2, 3); r=5$ b) $C(-2, 4/5); r=8/3$ c) $C(-3/4, 1); r=2/3$ d) $C(-2, 1/5); r=-55$
e) $C(4/9, -5/4); r=10/6$ f) $C(\sqrt{2}, -1); r=\sqrt{3}$

2. Encuentra la ecuación general de la circunferencia cuyo centro $C(h, k)$ y radio r se dan:

a) $C(1, 5); r=2$ b) $C(2, 4); r=3$ c) $C(1/2, 3/4); r=2/5$
d) $C(3/4, 1/2); r=2/3$ e) $C(\sqrt{2}, -1); r=\sqrt{5}$ f) $C(\sqrt{3}, -1); r=\sqrt{7}$

3. Encuentra el centro $C(h, k)$ y el radio r de la circunferencia cuya ecuación ordinaria se da:

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ b) $(x-2/3)^2 + (y-1)^2 = 3$ c) $(x+\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 2$

4. Determina si cada una de las siguientes ecuaciones representa una circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico. Si es circunferencia, halla su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$
e) $5x^2 + 5y^2 - 14x + 7y - 24 = 0$
f) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 18y + 3 = 0$
g) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 18 = 0$
h) $x^2 + y^2 - 10z + 6y + 35 = 0$
i) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$
j) $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$

5. Halla el valor de k , tal que el lugar geométrico representado sea una circunferencia de radio $r=3$. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y + k = 0$;

6. Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados:

a) $A(0, 1); B(2, 0); C(1, 1)$

- b) A(0, 2); B(3, 0); C(2, 2)
 c) A(0, 1/2); B(2/3, 0); C(0, 0)

7. Encuentra la ecuación general de una circunferencia que cumple con las especificaciones que se marcan en cada caso:
- a) Tiene el mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ y $r = 3/5$
 - b) Tiene el mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 = 0$ y $r = 1/2$
 - c) Es tangente al eje y y su centro es C(-3, 5)
 - d) Es tangente al eje x y su centro es C(-3, -4)
 - e) Es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ y su centro esta en el eje y . El punto de tangencia es (-1, 2)
 - f) Es tangente a la recta $x - y - 2 = 0$ en el punto (4, 2) y su centro esta en el eje x .
 - g) Pasa por los puntos A(-2, 3) y B(-1, -2) y su centro esta sobre la recta $2x - 3y + 1 = 0$
 - h) Pasa por los puntos A(-1, 4) y B(3, -5) y su centro esta sobre la recta $x + 4y - 2 = 0$
 - i) Su centro es C(-2, 1) y tiene el mismo radio que la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$
 - j) Su centro es C(4, -3) y tiene el mismo radio que la circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$
 - k) Es tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ y su centro está en C(3, -4)
 - l) Es tangente a la recta $5x - 12y - 24 = 0$ y el centro está en C(5, -5)
 - m) Tiene el mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 - 12 = 0$ y el mismo radio que la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 3 = 0$
 - n) Tiene el mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ y el mismo radio que la circunferencia $x^2 + y^2 - 10 = 0$
8. Una escalera de 4 m de longitud, está apoyada en la pared de un edificio. Si la escalera se desliza, halla la ecuación del lugar geométrico que describe el punto medio de la escalera.

Autoevaluación de la Unidad 4

1. Dado un segmento AB. ¿Qué lugar geométrico describe un punto, P, que se mueve de tal manera que el ángulo $\angle APB$ es recto?
2. Sean dados dos puntos fijos A y B. Halla el conjunto de puntos P tales que el perímetro del triángulo APB es igual a una constante: 3AB
3. Dada una circunferencia C y un punto exterior R. ¿Qué lugar geométrico describen todos los puntos tales que, cada uno de ellos, está a la misma distancia del punto fijo R que de la circunferencia?

Autoevaluación de la Unidad 5

11. Encuentra la ecuación ordinaria de la parábola dado su vértice V y su foco F

- a) $V(0, 0)$; $F(3, 0)$ b) $V(2, 3)$; $F(-1, 3)$ c) $V(-4, -2/3)$; $F(-3, -2/3)$

12. Encuentra la ecuación general de la parábola que cumple con lo siguiente

- a) Vértice $V(-2, -4)$; Foco $F(-5, -4)$
b) Vértice $V(2, 4)$; Foco $F(2, 0)$
c) Vértice $V(0, 0)$; Directriz $x + 2 = 0$
d) Vértice $V(0, 0)$; Directriz $x - 2 = 0$
e) Vértice $V(2, -5)$; Directriz $y + 1 = 0$
f) Directriz $y - 1 = 0$; Foco $(0, -3)$
g) Directriz $y - 3 = 0$; Foco $(0, -5)$

13. Las siguientes ecuaciones representan parábolas. En cada caso encuentra: el vértice V, el foco F, los extremos del lado recto (LR), la longitud del LR, la ecuación de la directriz y la ecuación del eje de simetría. Dibuja la curva.

- a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = -20x$ c) $x^2 = -10y$ d) $x^2 = 14y$
e) $8y^2 - 3x = 0$ f) $7x^2 + 2y = 0$ g) $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$
h) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$ i) $3y^2 + 60y - 24x + 388 = 0$

14. En cada caso, encuentra la ecuación general de la parábola usando la información que se da:

- a) Vértice $V(3, -4)$; eje horizontal y pasa por $P(2, -5)$
b) Vértice $V(0, 0)$; su foco en el eje y (positivo) y $LR = 8$
c) Vértice $V(0, 0)$; su foco en el eje x (negativo) y $LR = 12$
d) Vértice $V(0, 0)$; $LR = 4$ y la parábola abre hacia la derecha
e) Vértice $V(-1, -3)$; el eje es paralelo al eje x y pasa por el punto $P(2, 3)$
f) Eje vertical y pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(3, 6)$
g) Eje vertical y pasa por los puntos $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$ y $C(0, 8)$
h) Vértice $V(3, -4)$; eje horizontal y pasa por el punto $P(2, -5)$
i) Eje horizontal y pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 0)$
j) Los extremos de su lado recto son $L(3, 1)$ y $R(3, 5)$ y su foco está a la derecha del vértice
k) Los extremos de su lado recto son $L(-1, -4)$ y $R(-1, -8)$ y su foco está al lado izquierdo del vértice
l) Los extremos de su lado recto son $L(0, 2)$ y $R(4, 2)$ y su foco está abajo del vértice
m) Los extremos de su lado recto son $L(-3, 4)$ y $R(1, 4)$ y su foco está arriba del vértice

15. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 m. y están separados por una distancia de 500 m., quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 m. sobre la calzada del puente. Tomando como eje y el eje de simetría de la parábola, halla:

- La ecuación de la parábola.
- La altura de un punto situado a 80 m del centro del puente.

16. La función de demanda de cierto producto es:

$$3p + q^2 + 5q - 102 = 0$$

y la ecuación de su oferta es :

$$p - 2q^2 + 3q + 71 = 0$$

donde p es el precio y q es la cantidad.

- Construye las la gráficas de oferta y demanda
- Determina los puntos de equilibrio (son los puntos de intersección, oferta y demanda)
- Haz el análisis de la zona de beneficio y de pérdida.

17. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos datos se dan en cada caso. Después transforma esa ecuación ordinaria en ecuación general

- $C(0, 0)$; eje menor sobre el eje y; $a = 4$; $b = 3$
- $C(0, 0)$; eje mayor sobre el eje x; $a = 5$; $b = 2$
- $C(0, 0)$; $B'(0, -3)$; $F'(-2, 0)$
- $C(0, 0)$; $F(2, 0)$; $e = 1/3$
- $C(0, 0)$; $B(0, 5)$; $e = 0.2$
- $C(0, 0)$; $B'(0, -2)$; $e = 0.8$
- $C(0, 0)$; $B(0, 3)$; $E = 0.75$
- $C(0, 0)$; $V(5, 0)$; $LR = 3.6$
- $C(0, 0)$; $B'(0, -1)$; $LR = 0.5$
- $C(2, 3)$; eje menor paralelo al eje x; $a = 5$; $b = 4$
- $C(-1, 4)$; eje mayor paralelo al eje x; $a = 3$; $b = 1$
- $C(4, -5)$; $V(7, -5)$; $B'(4, -7)$
- $C(-2, -4)$; $V'(-7, -4)$; $B(-2, 0)$
- $C(0, 5)$; eje menor al paralelo al eje x; $c = 2$; $b = 3$
- $C(-3, 0)$; eje mayor paralelo al eje y; $c = 1$; $a = 4$
- $C(-2/3, 3/4)$; LR es paralelo al eje y; $c = 2$; $b = 4$
- $C(-1/2, 3/5)$; LR es paralelo al eje x; $c = 4$; $b = 3$
- $C(-1, -5)$; una directriz es paralela al eje x; $e = 8/9$; $c = 8$
- $C(-3, -3)$; una directriz es paralela al eje y; $e = 3/8$; $c = 8$
- $F(-1, 3)$; $F'(-1, -5)$; el eje mayor mide 10
- $F(2, 4)$; $F'(-6, 4)$; el eje menor mide 6
- $C(0, 0)$; los focos están sobre el eje y; $VV' = 6$; $BB' = 4$
- $C(0, 0)$; los focos están sobre el eje x; $VV' = 8$; $BB' = 2$
- $C(0, 0)$; $V(0, -7)$; la curva pasa por $P(-3, 7/2)$

- y) Una directriz es paralela al eje y , pasa por los puntos $A(0, 1)$; $B(1, -1)$; $C(2, 2)$; $D(4, 0)$

18. Las siguientes ecuaciones representan elipses. En cada caso hallar:

- El centro C
- Los focos F, F'
- Los vértices V, V'
- B, B'
- $LR, L'R'$
- Ecuaciones de los ejes
- Ecuaciones de las directrices
- Dibujar elipse
- Excentricidad

- a) $y^2/25 + x^2/16 = 1$
 b) $y^2/169 + x^2/144 = 1$
 c) $y^2/25 + x^2/4 = 1$
 d) $(x-3)^2/16 + (y-2)^2 = 1$
 e) $(x-2)^2/36 + (y-3)^2/9 = 1$
 f) $(y+5)^2/169 + (x+2)^2/49 = 1$
 g) $(y+3)^2/36 + (x-6)^2/16 = 1$

19. En cada caso transforma la ecuación general en ecuación ordinaria; determina si la ecuación representa una elipse, un punto o el conjunto vacío. Si la ecuación representa una elipse, encuentra lo siguiente:

- El centro C
- Los focos F, F'
- Los vértices V, V'
- B, B'
- $LR, L'R'$
- Ecuaciones de los ejes
- Ecuaciones de las directrices
- Dibujar elipse
- Excentricidad

- a) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$
 b) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$

- c) $25x^2 + 4y^2 - 150x + 16y + 241 = 0$
d) $x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43 = 0$
e) $4y^2 + 7x^2 + 42x - 8y + 11 = 0$
f) $4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 31 = 0$
g) $9x^2 + 8y^2 + 54x - 16y - 199 = 0$
h) $3x^2 + 8y^2 + 6x - 12y - 62 = 0$
i) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
j) $3x^2 + 2y^2 + 24x - 12y + 60 = 0$

20. Encuentra lo que se te pide:

- a) Una elipse cuyos vértices son $V(2, 1)$ y $V'(-6, 1)$ pasa por el punto $P(1, -1)$
Determina si los siguientes puntos pertenecen o no a la elipse
 $Q(-2, (8 + \sqrt{7})/\sqrt{7})$; $R(-2, 0)$; $S(-2, \sqrt{64}/7)$
- b) Una elipse cuyos vértices son $V(-3, -1)$ y $V'(-3, 5)$ pasa por el punto $(0, 0)$
Determina si los siguientes puntos pertenecen a una elipse:
 $E(81 - (\sqrt{5})/3, 2)$; $G(-3, 5)$
- c) La Luna gira alrededor de la Tierra y su órbita es una elipse y la Tierra es uno de sus focos. El eje mayor mide 768, 000 Km y su excentricidad es $e = 0.055$. Halla las distancias de los vértices a la Tierra; Éstas son la distancia mayor y la distancia menor de la luna a la tierra.
- d) De la misma manera que la Luna gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita elíptica, los 9 planetas (incluyendo la Tierra) giran alrededor del Sol en una órbita elíptica. Con los datos que se presentan, calcula la distancia mayor y la distancia menor de cada uno de los planetas al sol.

Planeta	Eje Mayor	Excentricidad
Mercurio	116.4×10^6 Km	0.206
Venus	216×10^6 Km	0.0068
Tierra	300×10^6 Km	0.0167
Marte	454×10^6 Km	0.093
Júpiter	1556×10^6 Km	0.048
Saturno	2854×10^6 Km	0.055
Urano	5472×10^6 Km	0.047
Neptuno	8996×10^6 Km	0.009
Plutón	11.820×10^6 Km	0.247

21. El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 metros de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 metros. Determinar la altura al arco a 6 metros del centro de la base.

22. En cada caso determina si el punto dado pertenece a la hipérbola cuya ecuación se da:

- | | |
|---|--|
| a) $x^2/4 - y^2/9 = 1$; $P(4\sqrt{10}/3, 1)$ | b) $x^2/2 - y^2/6 = 1$; $P(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ |
| c) $x^2 - y^2 = 5$; $P(3, 1)$ | d) $3y^2 - x^2 = 1$; $P(\sqrt{2}, -5)$ |
| e) $5y^2 - 9x^2 = 36$; $P(1, -3)$ | f) $3x^2 - y^2 = 12$; $P(4, 6)$ |

23. Encuentra la ecuación ordinaria de la hipérbola cuyos datos se dan. Después, transforma esa ecuación ordinaria en ecuación general:

- j) $C(0, 0)$; eje conjugado vertical; pasa por $P(3, 5)$ y $Q(2, -3)$
- k) $C(4, 0)$; $F'(4, -16)$; el eje conjugado mide 10
- l) $C(-3, 5)$; $F'(5, 5)$; el eje transversal mide 10.
- m) $C(0, 0)$; $F(13, 0)$; una asíntota es $y = 5/12x$
- n) $C(0, 0)$; $F(0, 7)$; una asíntota es $y = 5/6x$
- o) $C(1, 2)$; $e = 4/3$; $F(1, 5)$
- p) $C(2, 1)$; $e = 5/4$; $F(5, 1)$

24. Las siguientes ecuaciones representan hipérbolas; en cada caso halla:

- El centro C
- Los focos F, F'
- Los vértices V, V'
- B, B'
- $LR; L'R'$
- Asíntotas
- Ecuaciones de los ejes
- Ecuaciones de las directrices
- Dibujar la elipse
- Excentricidad

- a) $x^2/16 - y^2/4 = 1$
- b) $y^2/16 - x^2/4 = 1$
- c) $y^2/25 - x^2/9 = 1$
- d) $x^2/25 - y^2/9 = 1$
- e) $x^2/36 - y^2/36 = 1$
- f) $y^2/36 - x^2/36 = 1$
- g) $(x+2)^2/16 - (y-3)^2/9 = 1$
- h) $(y-5)^2/36 - (x+5)^2/25 = 1$

25. En cada caso, determina si la ecuación representa una hipérbola o dos rectas que se cortan. Si son dos rectas, escribe las ecuaciones; si es una hipérbola encuentra lo mismo que en el ejercicio anterior.

a) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$

b) $3x^2 - 2y^2 + 4y - 26 = 0$

c) $9x^2 - 4y^2 + 90x + 189 = 0$

d) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$

e) $4y^2 + 9y - x^2 + 2x + 1 = 0$

Autoevaluación de la Unidad 6

7. En cada caso, escribe la nueva ecuación que resulta cuando el origen se traslada al punto O' dado. Escribe el nombre de cada curva.

a) $3x + 2y + 5 = 0$; $O'(-1, 2)$

c) $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$; $O'(-2, 3)$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$; $O'(1, 3)$

d) $4y^2 + 9x^2 - 24y - 72x + 144 = 0$; $O'(4, 3)$

8. Para cada ecuación, encuentra el punto al que debe trasladarse el origen, de manera que la ecuación transformada no tenga términos de primer grado. Escribe la nueva ecuación; en el caso de las parábolas elimina un término de primer grado y el término independiente.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 7 = 0$

f) $x^2 - 6x - 16y + 73 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 20 = 0$

g) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$

9. Dada la ecuación $x^2 + x y + y^2 = 1$, gira los ejes un ángulo de 45° y halla la nueva ecuación.

10. Encuentra el ángulo de rotación de manera que al transformar la ecuación $x^2 - x y + 3 = 0$ la nueva ecuación no tenga término en $x' y'$.

11. Encuentra el ángulo de rotación de manera que al transformar la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 2$ no tenga término en $x' y'$.

12. Dada la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$, girar los ejes a un ángulo de 30° y hallar la nueva ecuación.
13. Dada la ecuación $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$ gira los ejes a un ángulo de 30° y halla la nueva ecuación.
14. Realizando una rotación y después una traslación de ejes, reduce la ecuación $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 0$ de manera que queden únicamente los términos cuadráticos y el término independiente.
15. ¿En qué ángulo deben rotarse los ejes para que en la ecuación $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 150x - 50y + 100 = 0$ desaparezca el término xy ?
16. Encuentra el tipo al que pertenece cada una de las siguientes curvas, considerando el valor del discriminante:
 - a) $3x^2 + xy + x - 4 = 0$
 - b) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$
 - c) $2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$
 - d) $xy + x - 2y + 3 = 0$

Autoevaluación de la Unidad 7

1. En cada caso elimina el parámetro y obtén la ecuación rectangular correspondiente. Después traza la gráfica.

a) $x = 2t$; $y = 3t$	e) $x = 2 + \cos A$; $y = 2 + \sin A$
b) $x = 3t$; $y = 2t$	f) $x = 1 + \sin A$; $y = 1 + \cos A$
c) $x = 1 + 2t$; $y = 2 - t^2$	g) $x = 2 \sin \theta$; $y = \cos 2\theta$
d) $x = 2 + t$; $y = 1 + t^2$	h) $x = \cos 2\theta$; $y = 2 \sin \theta$
2. Elimina el parámetro y halla la ecuación rectangular:

a) $x = 2 \cos \theta$; $y = \sin^2 \theta$	c) $x = \sec \theta$; $y = 2 \tan \theta$
b) $x = 4 \sin \theta$; $y = 2 \cos \theta$	d) $x = 4 \cos t$; $y = 4 \sin t$
3. Considera las ecuaciones paramétricas del movimiento de un proyectil que es lanzado desde una posición cero, a un ángulo θ y con una velocidad inicial $x = (V_0 \cos \theta)t$; $y = (V_0 \sin \theta)t - 4.9t^2$, siendo “x” y “y” las posiciones, en metros, horizontal y vertical respectivamente del proyectil y t el tiempo (parámetro) en segundos. Se lanza un proyectil desde un punto A con una velocidad inicial de 1000 metros por segundo formando un ángulo de 35° con la horizontal. Halla el alcance del proyectil y la duración de la trayectoria.

Autoevaluación de la Unidad 8

1. Traza la gráfica de cada ecuación polar e identifica el tipo de curva que representa cada una
a) $r = -3\sin\theta$ b) $r = 3 + 3\cos\theta$ c) $r = 3\theta$ d) $r^2 = 4\cos 2\theta$
e) $r = 2\sin\theta$ f) $r = 2\sin 3\theta$ g) $r = -2\sin 3\theta$ h) $r = (5/2)\theta$
i) $r = -5 + 3\cos\theta$ j) $r = -2 - 2\sin\theta$ k) $r^2 = 9\sin 2\theta$ l) $r = \sin 4\theta$
2. Escribe una ecuación para una rosa con tres pétalos
3. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo de $r = 3 + 5 \sin\theta$?
4. ¿Cuál es una ecuación para una espiral de Arquímedes que pasa a través de $A(\pi/4, \pi/2)$?
5. Traza la gráfica de cada sistema de ecuaciones polares. Resuelve el sistema utilizando álgebra y trigonometría. Supón que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
a) $r = 3$; $r = 2 + \cos\theta$ b) $r = 1 + \cos\theta$; $r = 1 - \cos\theta$ c) $r = 2\sin\theta$; $r = 2\sin 2\theta$
6. Encuentra las coordenadas polares de cada punto con las coordenadas rectangulares dadas. Supón que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r > 0$.
a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ b) $(-2, -5)$ c) $(2/5, -3/2)$
7. Encuentra las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares dadas
a) $(-2, 4\pi/3)$ b) $(2.5, 250^\circ)$ c) $(-5/2, 5\pi/3)$
8. Escribe cada ecuación rectangular en forma polar
a) $y = 2$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $x^2 - y^2 = 1$ d) $x^2 + y^2 = 2y$
9. Escribe cada ecuación polar en forma rectangular
a) $r = 6$ b) $r = -\sec\theta$ c) $r = 3\cos\theta$ d) $r = 2\csc\theta$
e) $r^2 \sin 2\theta = 8$ f) $\theta = \pi/3$
10. Identifica el tipo de gráfica generado por la ecuación polar $r = 2a\sin\theta + 2a\cos\theta$. Escribe la ecuación rectangular equivalente

Exámenes de muestra

A continuación se presenta una muestra de exámenes departamentales aplicados en los CECyT's del Instituto Politécnico Nacional.

I. Primer departamental

Primer ejemplo:

MATERIA: GEOMETRÍA ANALÍTICA

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los reactivos que se te proponen y resuélvelos en forma ordenada y limpia, construye de cada uno de ellos una grafica y encierra los resultados obtenidos.

“PUEDES USAR CALCULADORA”

PROBLEMA: Los puntos $A(7, 3)$ $B(-3, 5)$ $C(5, -7)$, son los vértices de un triángulo; de él calcula:

1.-El perímetro y el área de triángulo

(valor: 10 puntos)

2.-Calcula las coordenadas de sus puntos medios, las ecuaciones de sus medianas y las coordenadas del “BARICENTRO”

(valor: 20 puntos)

3.-Calcula las pendientes de sus lados, las ecuaciones de sus mediatrices y las coordenadas del “CIRCUNCENTRO”

(valor: 20 puntos)

4.-Los ángulos interiores del triángulo

(valor:10 puntos)

Valor del examen: 60 puntos

Evaluación continua: 40 puntos

Valor total: 100 puntos

Segundo ejemplo:

ASIGNATURA: GEOMETRÍA

INSTRUCCIONES: SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTIFIC A.

NO SE PERMITE EL USO DE MATERIAL ADICIONAL.

AVANCE PROGRAMATICO A EVALUAR: DE 1.1 A 2.5

1.- Obtener el área del polígono cuyos vértices son los puntos A (-3, 3), B (2, 1), C (1, -5) y D (-5, -2). Graficar

valor 1 punto.

2.- Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A (-5, 4), B (2, 2), C (4, -4). Graficar.

valor 2 puntos.

3.- Calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos A (-4, -3), B (2,2) y C (6, -1). Graficar

valor 0.5 puntos.

4.- Obtener las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos H (-5,-3) y G (5, 3). Graficar.

valor 1.5 puntos.

5.- Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3, 4) y es paralela a la recta que pasa por los puntos A (7, 3) y B (-1, -4). Graficar.

valor 1 punto.

6.- Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto Q (2,4) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (-2, -4) y B (4, -1). Graficar.

valor 1 punto.

7.- Uno de los extremos de un segmento recto de longitud 5 es el punto A (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6 obtener su ordenada. Graficar

valor 0.5 puntos.

8.- Una recta de pendiente 3 pasa por el punto A (3, 2). La abscisa de otro punto B de la recta es 4, Obtener su ordenada. Graficar.

valor 0.5 puntos.

Tercer ejemplo:

ASIGNATURA: GEOMETRÍA

INSTRUCCIONES: SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTIFIC A.

NO SE PERMITE EL USO DE MATERIAL ADICIONAL.

AVANCE PROGRAMATICO A EVALUAR: DE 1.1 A 2.5

1.- Obtener el área del polígono cuyos vértices son los puntos P (1, -5), Q (-3, 3), R (2, 1), y S (-5, -2). Graficar

valor 1 punto.

2.- Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $P(4, -4)$, $Q(-5, 4)$, $R(2, 2)$. Graficar.

valor 2 puntos.

3.- Calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $A(-6, 1)$, $B(-2, -3)$ y $C(4, 3)$. Graficar

valor 0.5 puntos.

4.- Obtener las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-4, 5)$ y $B(5, 1)$. Graficar.

valor 1.5 puntos.

5.- Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $R(-5, 4)$ y $Q(4, -4)$. Graficar.

valor 1 punto.

6.- Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(4, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-6, 1)$ y $B(-2, -3)$. Graficar.

valor 1 punto.

7.- Uno de los extremos de un segmento recto de longitud 10 es el punto $A(-2, -5)$. Si la ordenada del otro extremo es 3 obtener su abscisa. Graficar.

valor 0.5 puntos.

8.- Una recta de pendiente 1 pasa por el punto $A(-1, 4)$. La ordenada de otro punto B de la recta es 2, Obtener su abscisa. Graficar.

valor 0.5 puntos.

VALOR TOTAL DEL EXAMEN 8 PUNTOS.

Cuarto ejemplo:

GEOMETRIA ANALITICA

1. Encuentre la distancia entre los puntos. $A(2, 3)$; $B(5, 4)$
2. Si $A(x, 5)$ equidista de $B(3, -4)$ y $C(-4, 0)$, hallar x .
3. Encuentra las coordenadas de $P(x, y)$, si el punto P es el punto medio del segmento que une los puntos $A(-2, 3)$; $B(-2, 3)$
4. P divide al segmento AB de tal manera que $r = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Si $A(-3, 1)$ y $B(2, -3)$, encuentra las coordenadas del punto P
5. Calcula el área de cada triángulo cuyos vértices son los que se indican: $A(2, 0)$; $B(-3, 5)$; $C(3, 2)$
6. Calcula la pendiente e inclinación de la recta que pasa por los puntos. $A(0, 1)$; $B(3, 5)$

7- Usa los dos datos que se dan para hallar la ecuación general de la recta y gráfícala.

a) A (3, -5); B(-1, 0)

b) $a = -1$; $b = -5$

c) A(1/2, 0); $m = -3/5$

d) $m = -2$; $b = -1$

8.- Hallar la distancia de la recta $5x - 12y + 3 = 0$ al punto P(-2, 1)

9.- Para cada par de rectas realiza lo siguiente:

A) Encuentra su intersección (si existe)

B) Determina si son perpendiculares o paralelas

C) Sí no son perpendiculares ni paralelas calcula el ángulo que forman

$$3x + 2y - 6 = 0$$

$$3x + 2y - 4 = 0$$

II. Segundo departamental

Primer ejemplo:

CONTENIDOS PROGRAMÁTICOS QUE SE EVALÚAN: UNIDADES 3, 4 Y 5

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas en forma ordenada y con lápiz. Se califica procedimiento y resultado, con la salvedad de que resultado sin procedimiento no se toma en cuenta.

NOTA: Se permite el uso de formulario y calculadora.

1.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (-4,-1) y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$, así como las coordenadas del punto de tangencia.

VALOR (2 PUNTOS)

2.- Dada la ecuación de la parábola $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice, foco, longitud del lado Recto, ecuación de la Directriz, así como la gráfica correspondiente.

VALOR (1 PUNTO)

3.- Los vértices de una elipse son los puntos (1,1) y (7,1) y su excentricidad es $e = 1/3$. Hallar su ecuación, en su forma reducida y en su forma general, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes Mayor y Menor, longitud de su lado recto, así como la gráfica correspondiente.

VALOR (1 PUNTO)

4.- Una empresa electrónica produce televisores (T) y estéreos (E) la curva de transformación (ó de posibilidades de producción) esta dada por la ecuación $E^2 + 3E + 5T = 128$, que representa las combinaciones distintas de cada artículo que

pueda producir la empresa utilizando eficientemente todos los recursos, determinar:

- a) El número máximo de estéreos que puede producir la empresa.
 - b) El número máximo de televisores.
 - c) La cantidad de estéreos, si se producen 18 televisores.
 - d) La cantidad de televisores, si se producen 7 estéreos.
 - e) Gráfica de la función.
- VALOR (2 PUNTOS)

5.-Hallar la altura de un punto de un arco parabólico de 18 m de altura y 24 m de base, situado a una distancia de 8m del centro del arco.

VALOR (2 PUNTOS)

Segundo ejemplo:

INSTRUCCIONES:

- RESUELVE SOLO 5 (CINCO REACTIVOS). BIEN DESARROLLADOS.
- SE PERMITE EL USO DE FORMULARIO Y CALCULADORA PERO NO SU INTERCAMBIO.
- CADA REACTIVO VALE 2 PUNTOS.
- VALOR TOTAL DEL EXAMEN 10 PUNTOS.
- GRAFIQUE CADA PROBLEMA QUE RESUELVA.

- 1.- Halle la ecuación de la recta $4x - 2y + 12 = 0$, en su forma normal y determinar los valores de p y ω .

$$\text{Solución: } \frac{4}{-\sqrt{20}}x + \frac{2}{\sqrt{20}}y - \frac{12}{\sqrt{20}} = 0; \quad p = \frac{12}{\sqrt{20}}; \quad \omega = 153^{\circ}26'6''.$$

2. Encuentre la distancia del punto $P(7, 5)$ a la recta $4x - 5y + 5 = 0$.

$$\text{Solución: } d = \left| \frac{8}{-\sqrt{41}} \right| = 1.249390095..$$

3. Determine la ecuación de la circunferencia cuyos puntos $A(-3, 4)$ y $B(5, -2)$, son los extremos de uno de sus diámetros.

$$\text{Solución: } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25; \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0.$$

4. Determine si la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 8x - 48y + 76 = 0$, es una circunferencia real o un punto o imaginaria. Si es real, ¿qué coordenadas tiene su centro y cuánto mide su radio?

$$\text{Solución: } \text{SÍ es circunferencia real; } C(1, 6); r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4.24260687...$$

5. Encuentre la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y general, si su centro es el punto $C(2, -3)$ y es tangente a la recta $x - y - 1 = 0$.

$$\text{Solución: } (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8; \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0.$$

6. Encuentre la ecuación de la parábola en su forma ordinaria y general, si su vértice es el punto $V(0, 2)$ y las coordenadas del foco son $F(-2, 2)$.

$$\text{Solución: } (y - 2)^2 = -8x; \quad y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

7. Reduzca a la forma ordinaria de la ecuación de la parábola y determine las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto (ancho focal).

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$$

Solución: $(y - 1)^2 = -8(x - 2)$; V(2, 1); F(0, 1); D: x = 4.

8. Por una traslación de ejes, transforme la ecuación en otra que carezca de términos de primer grado.

$$3x^2 + 3y^2 - 42x - 4y + 133 = 0.$$

Solución: $3x'^2 + 3y'^2 - \frac{46}{3} = 0$.

Tercer ejemplo:

INSTRUCCIONES GENERALES:

- SE PERMITE EL USO DE FORMULARIO Y CALCULADORA PERO NO SU INTERCAMBIO
- RESOLVER UNICAMENTE 5 EJERCICIOS
- HACER LA GRAFICA DE CADA EJERCICIO
- EL VALOR DE CADA REACTIVO ES DE 1.2 PUNTOS

I.- HALLAR LA ECUACIÓN DE LA BISECTRIZ VERTICAL DEL ANGULO FORMADO POR LAS RECTAS $x + y - 2 = 0$, $x - y = 2$

R: x=2

II.-ESCRIBIR EN LA FORMA NORMAL LA ECUACION $4x + 3y - 24 = 0$, ADEMAS, DETERMINAR EL VALOR DE P Y W

$$\frac{4x + 3y - 24}{5} = 0 \quad W = 36^\circ 52' 11'' \quad p = 24/5$$

III.- EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA ES EL PUNTO DE INTERSECCION DE LAS RECTAS $X - 2Y = 0$, $X + 2Y = 0$, ADEMAS, ES TANGENTE A LA RECTA $3X + 4Y - 50 = 0$. HALLAR SU ECUACION

$$R = x^2 + y^2 - 100 = 0$$

IV.- EL DIAMETRO DE UNA CIRCUNFERENCIA TIENE POR EXTREMOS LOS PUNTOS (0,-4) y (6,4). ENCONTRAR SU ECUACION

$$(x - 3)^2 + y^2 = 25, \quad x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$$

V.- LA ECUACION DE UNA PARABOLA ES $y^2 = 20x$. DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL VERTICE, LAS COORDENADAS DEL FOCO, LA ECUACION DE LA DIRECTRIZ Y LA LONGITUD DEL LADO RECTO

R: V(0,0) F(5,0) Directriz $x = -5$ lado recto = 20

VI.- EL FOCO DE UNA PARABOLA ES F(5,0) Y SU VERTICE ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA $x^2 + y^2 = 4$. HALLAR SU ECUACION.

$$y^2 = 20x$$

VII.- DETERMINAR LA ECUACION DE LA PARABOLA DEL VERTICE (2,4), ECUACION DE LA DIRECTRIZ $X = -6$

$$R: (y - 4)^2 = 32(x - 2) \quad y^2 - 32x - 8y + 80 = 0$$

III. Tercer departamental

Primer ejemplo:

INSTRUCCIONES: RESOLVER UNICAMENTE 5 REACTIVOS. SE PERMITE EL USO DE FORMULARIO Y CALCULADORA. EL VALOR DE CADA REACTIVO ES DE 1.2 PUNTOS

1.- HALLAR LA ECUACION DE LA ELIPSE CUYOS VERTICES SON LOS PUNTOS (4, 0) Y (-4, 0) SUS FOCOS SON LOS PUNTOS (3, 0) Y (-3, 0) GRAFICAR

2.- LOS VERTICES DE UNA ELIPSE SON LOS PUNTOS (1, 1) Y (7, 1), SU EXCENTRICIDAD ES $\frac{1}{3}$, HALLAR SU ECUACION Y GRAFICAR.

3.- LOS VERTICES DE UNA HIPERBOLA SON (0,4) Y (0, -4). SU EXCENTRICIDAD ES IGUAL A $\frac{3}{2}$. HALLAR SU ECUACION Y GRAFICAR.

4.- REDUCIR LA ECUACION SIGUIENTE A LA SEGUNDA FORMA ORDINARIA DE LA ECUACION DE LA HIPERBOLA.

$$9X^2 - 4Y^2 + 54X + 16Y + 29 = 0$$

5.- PASAR LA ECUACION POLAR A RECTANGULAR :

$$r = \frac{2}{1 - \cos Q}$$

6.- PASAR LA ECUACION RECTANGULAR A POLAR:

$$5X^2 + 9Y^2 = 8X + 4$$

7.- IDENTIFIQUE QUE CURVA O CONICA REPRESENTA CADA UNA LAS ECUACIONES:

$$Y^2 - 3X^2 - 30X - 78 = 0 \underline{\hspace{2cm}}$$

$$X^2 + Y^2 + 14X - 10Y + 26 = 0 \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9X^2 + 4Y^2 - 18X + 8Y - 23 = 0 \underline{\hspace{2cm}}$$

$$X^2 - 8Y + 6X = 8 \underline{\hspace{2cm}}$$

$$X^2 + 2XY + Y^2 - 8X + 8Y = 0 \underline{\hspace{2cm}}$$

Segundo ejemplo:

INSTRUCCIONES: LEE CUIDADOSAMENTE CADA UNO DE LOS SIGUIENTES REACTIVOS Y ESCRIBE TU PROCEDIMIENTO DE RESOLUCION EN LA HOJA ANEXA. SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

1.- HALLAR LA ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN QUE TIENE UN VERTICE EN (6,0) Y LA LONGITUD DEL EJE MENOR ES IGUAL A 10.

Sol: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

VALOR: 5 PUNTOS

2.- HALLAR LA ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN QUE TIENE UN FOCO EN (3,0) Y LR = 9

Sol: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

VALOR: 5 PUNTOS

3.- HALLAR LA ECUACION DE LA ELIPSE QUE TIENE SUS FOCOS EN (-4,-2) Y (-4,-6) Y LR =6

Sol: $\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

VALOR: 10 PUNTOS

4.- HALLAR LAS COORDENADAS DEL CENTRO, DE LOS FOCOS, DE LOS VERTICES Y LA EXCENTRICIDAD DE LA SIGUIENTE ELIPSE CUYA ECUACION ES.

$$25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0$$

Sol: $C(4, -5) \quad F(8, 5) \quad F'(0, -5) \quad e = \frac{4}{5} < 1$
 $V(9, -5) \quad V'(-1, -5) \quad B(4, -2) \quad B'(4, -8)$

VALOR: 10 PUNTOS

5.- HALLAR LA ECUACION DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN, TIENE UN FOCO EN (9,0) Y EXCENTRICIDAD IGUAL A 3/2.

Sol: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$

VALOR:

5 PUNTOS

6.- HALLAR LA ECUACION DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN, QUE TIENE UN VERTICE EN (6,0) Y UN FOCO EN (9,0).

Sol: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$

VALOR: 5

PUNTOS

7.- HALLAR LA ECUACION DE LA HIPERBOLA QUE TIENE UN FOCO EN (1,2) Y LOS EXTREMOS DEL EJE CONJUGADO ESTAN EN (3,1) Y (3,5).

IMAGINARIA

VALOR: 10 PUNTOS

8.- HALLAR LAS COORDENADAS DEL CENTRO, DE LOS FOCOS, DE LOS VERTICES Y LR, DE LA HIPÉRBOLA CUYA ECUACION ES:

$$4x^2 - 9y^2 - 56x - 18y + 43 = 0$$

$$C(7,-1) \quad V(13,-1) \quad V'(1,-1) \quad B(7,3) \quad B'(7,-5) \quad F(7+\sqrt{52},-1) \quad F'(7-\sqrt{52},-1)$$

VALOR: 10 PUNTOS

Bibliografía

7. Bibliografía

Los materiales que se utilizaron en la elaboración de este trabajo son:

Alarcón, J., Bonilla, E. Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R., ***Libro para el maestro. Matemáticas***. SEP, 1994.

Alsina, C., Fortuny, J.M., Pérez, R., ***¿Por qué Geometría?*** Editorial Síntesis, 1997.

Alvarado, D., ***Las Creencias y Concepciones en un Ambiente de Resolución de Problemas***. Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 1998

Antón, J.L., González, F., González, C., Llorente, J., Montamarta, G., Rodríguez, J.A., y Ruiz, M.J., ***Taller de Matemáticas***. Narcea Ediciones y MEC de España. Madrid, 1994.

Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. ***Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching***. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 1996.

Chevallard, Y.; Bosch, M y Gascón, J., ***Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje***. ICE-Horsori, 1997.

Coxford, A., ***Geometry from multiple perspectives***. NCTM, 1991.

De Prada, D., Martínez, I. Y Alcalde, J., ***El comentario de textos matemáticos***. Editorial Ágora, 1991.

Efimov, N. ***Curso Breve de Geometría Analítica***. Editorial Mir, 1969.

Ernest, P. The Problem-Solving Approach to Mathematics Teaching. ***Teaching Mathematics and its Applications***, Volume 7, No. 2, 1988.

Grupo Editorial Iberoamérica. Revista ***Educación Matemática***

Kletenik, D. ***Problemas de Geometría Analítica***. Editorial Mir, 1979.

López de Medrano, S., ***Modelos matemáticos***. ANUIES, 1972.

Kasner, E. & Newman, J., ***Matemáticas e imaginación***. Biblioteca personal Jorge Luis Borges. Hyspamérica, 1985.

NCTM. Revista *Mathematics Teacher*.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles and Standards for School Mathematics*. (<http://standards.nctm.org/>), 2000.

Nickerson, R.S. & Zodhiates, P.P., *Technology in Education: Looking toward 2020*. New Jersey: LEA., 1988

Novak, J. y Gowin D., *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca, 1984.

Novak, J., *Conocimiento y aprendizaje*. Alianza Editorial, 1998.

Paulos, J., *El hombre anumérico*. Tusquets Editores, 1990.

Paulos, J., *Más allá de los números*. Tusquets Editores, 1990.

Perkins, D., *Smart Schools. From Training Memories to Educating Minds*. New York: The Free Press. (Hay traducción al español de Gabriela Ventureira en Gedisa Editorial, 1995, con el título de *La escuela inteligente*.), 1992.

Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, 1965.

Rico, Luis, Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional RELIME: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa: Num 1*, CLAME, México: Thompson Editores, 1998.

Río, José del. *Lugares geométricos. Cónicas*. Síntesis, 1996.

Rojano, T. & Ursini, S., *Álgebra con hojas electrónicas de cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.

Ruiz, B., *Curso rediseñado de matemáticas remediales*. México: ITESM Campus Estado de México. En la plataforma LearningSpace: RZSRZSH1/RZS/ITESM, LSPACE\VA\curmod\cemma801\, 1999.

Selby Peter M. *Teoría y Práctica Geometría Analítica*. SITESA, 1990.

Selmes, I., *La mejora de las habilidades de estudio*. Paidós. 1992.

Seymour, D. & Shedd, M., *Diferencias finitas*. CECSA, 1981.

Simmons, G. F., *PreCalculus Mathematics in a Nutshell: Geometry, Algebra, Trigonometry*. William Kaufmann Inc, 1981.

SMSG (School Mathematics Study Group) ***Analytic Geometry***. Stanford University, 1965.

Steen, L., ***On the shoulders of giants***. The National Academy of Sciences, 1990.

Stenmark, Jean K., ***La evaluación de las matemáticas. Mitos, modelos, buenas preguntas y sugerencias prácticas***. NCTM, Reston, VA, 1992. (Selección y traducción del Club de Matemáticas del CECyT Wilfrido Massieu).

Suárez, L., ***El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas***. Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 2000.

Sullivan, Michael. ***Precálculo***. Prentice-Hall, 1997.

Szymborska, Wislawa. ***Poesía no completa***. FCE, 2002.

Torres, J., ***La Metodología de Estudio en un Ambiente de Resolución de Problemas***. Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 1997.

Vasíliev, N.B. y Gutenmájer, V.L. ***Rectas y curvas***. Editorial Mir, 1980.