COLEGIO DE BACHILLERES

Matemáticas III

Guía de estudio para presentar exámenes de Recuperación y Acreditación Especial

(Versión preliminar)

Reforma Curricular
Diciembre de 2004

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Permítenos felicitarte cordialmente por estar leyendo esta guía, ya que es una muestra de tu interés y decisión de explorar y utilizar los materiales que te ofrece el Colegio de Bachilleres para prepararte adecuadamente antes de presentar un examen de Recuperación o Acreditación Especial.

La guía que estás leyendo constituye un trabajo realizado por profesores del Colegio de Bachilleres, del plantel 17 “Huayamilpas-Pedregal”, que con base en su experiencia docente y en el conocimiento del programa de estudios de la Reforma Curricular 2003, se fijaron el propósito de colaborar contigo en varias formas:

- Especificando los temas y aprendizajes sobre los que serás evaluado en un examen extraordinario.
- Elaborando síntesis de cada tema para apoyarte en tu estudio.
- Elaborando preguntas, similares a las que encontrarás en los exámenes extraordinarios, para que también te ejercites en la solución de estos tipos de reactivos y te autoevalúes.
- Planteando sugerencias y recomendaciones para apoyar tu preparación adecuada para el examen.

¿Qué ventajas obtendrás al resolver la Guía?

1. Tendrás un material de estudio sencillo y concreto que te permitirá prepararte adecuadamente en un lapso corto de tiempo.
2. Estudiarás todos los temas del programa de asignatura, en los que serás evaluado.
3. Podrás autoevaluarte para saber si estas preparado para presentar con éxito tu examen de Recuperación o Acreditación Especial, o saber que temas deberás estudiar con mayor ahínco.

¿Cómo estudiar para tener éxito?

Recuerda que una buena preparación es fundamental para lograr aprobar tus materias, por lo cual te recomendamos:

- Leer con cuidado cada uno de los resúmenes de tema y contestes las preguntas que vienen a continuación.
- Revisar tus respuestas y si te equivocaste realizar las actividades que se sugieren en las tablas de comprobación.
- Al término de cada unidad, contestar las preguntas de autoevaluación en el tiempo que se indica en cada bloque. Ten en cuenta que para contestar el examen de Recuperación o Acreditación Especial tendrás dos horas y por ello también debes ejercitarte en resolver los ejercicios bien y rápido.
- Si al concluir la autoevaluación te equivocaste, vuelve a repasar la guía o pregúntale a tus profesores o al jefe de materia de tu plantel.
- Para contestar toda la guía dedícate a estudiar al menos dos horas diarias durante 15 días, así estarás bien preparado para presentar con éxito tu examen.

PRÓLOGO

En el Programa Nacional de Educación 2001-2004, elevar la calidad de la educación que se ofrece, así como incorporar conocimientos básicos para la sociedad del conocimiento, se han destacado como objetivos que orientan a la educación del siglo XXI. Es por ello que el Colegio de Bachilleres, junto con otras instituciones de educación media superior inició la operación, en un plantel guía, de nuevos programas de estudio.

En el semestre 03-A se operaron por primera vez, en el plantel 17 “Huayamilpas Pedregal”, los programas de primer semestre de la Reforma Curricular y sus profesores elaboraron materiales didácticos para apoyar los diferentes momentos del proceso de enseñanza–aprendizaje.

Entre los materiales elaborados se encuentran las guías de estudio, las cuales tienen el propósito de apoyar a los estudiantes que presentarán exámenes de Recuperación o Acreditación Especial de las asignaturas de la Reforma Curricular 2004, con objeto de favorecer el éxito en los mismos.

En este contexto, la *Guía de estudio para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial* de **Matemáticas III** se ha elaborado pensando en los estudiantes que por diversas causas reprobaron la asignatura en el curso normal y pueden acreditarla a través de exámenes en periodos extraordinarios.

Esta guía se caracteriza por abordar, de manera sintética, los principales temas señalados en el programa de estudios. Las actividades y ejercicios que se plantean son un apoyo para que el estudiante aplique y re lacione sus conocimientos previos con otros más complejos, de modo que esté en condiciones de desarrollar procedimientos y modelos matemáticos aritméticos y algebraicos. Esto permitirá que, con el estudio de la guía, continúe mejorando y ejercitando sus habilidades de análisis y razonamiento matemático. Al final del desarrollo de las unidades la guía contiene una autoevaluación sobre los elementos esenciales de toda la unidad, para que el alumno verifique su grado de comprensión y dominio. Asimismo se incluyen algunas sugerencias para reforzar el apoyo sobre los aspectos estratégicos del tema.

La guía se organiza por unidad, igual que el programa de estudios; en cada una de ellas encontrarás un resumen de los temas y aprendizajes que se te van a evaluar, una serie de preguntas y ejercicios por tema, la tabla de respuestas a estos ejercicios, así como, al término de cada unidad, nuevos ejercicios para que te autoevalúes.

Así, en la primera unidad, denominada **SISTEMA DE EJES COORDENADOS**, realizarás *actividades y ejercicios sencillos sobrecojo* ubicar objetos en el plano a partir de sus coordenadas, para facilitarte su aplicación. En seguida, se abordan los aspectos más importantes relacionados con su representación gráfica y su utilidad para resolver diferentes tipos de problemas.

En la segunda unidad de la guía, **LA LÍNEA RECTA**, se presentan actividades en las que revisarás y aplicarás las principales propiedades de esta figura y sus aplicaciones por medio de las ecuaciones específicas, para plantear la solución y representación gráfica de diversos problemas.

En la tercera unidad, **LA CIRCUNFERENCIA**, revisarás las principales características de esta figura tomando en cuenta la elaboración de las gráficas correspondientes para facilitar la comprensión de sus elementos e implicaciones en la solución de problemas.

En la cuarta unidad, **LA PARÁBOLA**, abordarás el estudio de esta cónica por medio de sus ecuaciones y sus características gráficas, para conocer su potencialidad en la solución de problemas prácticos.

En la quinta unidad, **SECCIONES CÓNICAS Y ECUACIONES CUADRÁTICAS**, se desarrollan los temas relacionados con la elipse, la hipérbola y el concepto de *lugar geométrico*, que es un aspecto sumamente relevante en esta unidad, en conjunto te permitirán abordar y solucionar problemas y situaciones prácticas de la vida cotidiana

Por último, se proporciona una bibliografía básica para consultar en fuentes originales los temas desarrollados en la guía.

Unidad I

Sistema de Ejes Coordenados

1.1 SEGMENTOS RECTILINEOS

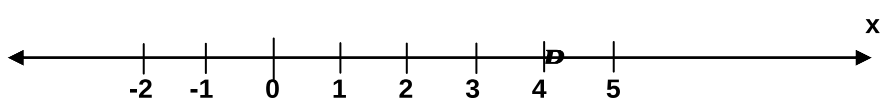
APRENDIZAJES
• Resolver problemas aplicando segmentos dirigidos. • Calcular la distancia entre dos puntos para la resolución de problemas. • Obtener el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta.

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría analítica es el de coordenada o coordenadas de un punto, ya que permiten ubicar un objeto u objetos en un lugar determinado por ejemplo, la posición de barcos y aviones respecto a una torre de control, la ubicación de países, ciudades, regiones en mapas, la posición final de móviles después de cierto desplazamiento, etc.

Las ubicaciones de objetos las podemos describir por medio de rectas numéricas y de direcciones norte (dirección positiva), sur (dirección negativa), este (dirección positiva) y oeste (dirección negativa).

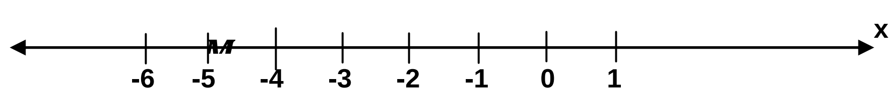
Empleando lo anterior analicemos el siguiente caso.

Sobre una recta numérica horizontal colocamos un punto, su coordenada nos indica la dirección respecto al origen, positiva si se encuentra a la derecha y negativa si se ubica a la izquierda. Al colocar el punto **P(4)** sobre la recta tenemos la figura siguiente:



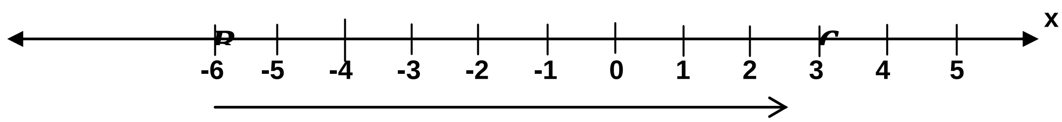
Esto nos representa que para ir del origen a **P** debemos dirigirnos cinco unidades hacia la derecha (sentido positivo).

Si colocamos el punto **M(-5)** sobre la recta nuestra gráfica queda de la manera siguiente:



Nos “dice” que para ir del origen al punto **M** tenemos que dirigirnos cinco unidades hacia la izquierda (sentido negativo), es decir – 5 unidades.

Al graficar dos puntos **B(-6)** y **C(3)** sobre la recta numérica tenemos que:



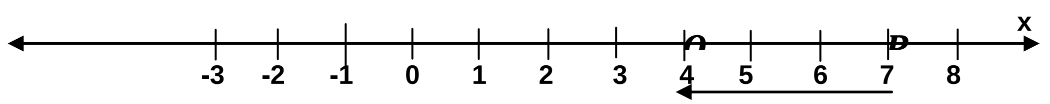
Si queremos dirigirnos de **B** a **C** contamos que hay nueve unidades en sentido positivo, que se calculan restando a la segunda coordenada la primera, es decir:

$$d_{\overline{BC}} = 3 - (-6)$$
$$= 3 + 6$$
$$= 9$$

De manera general cuando tenemos que calcular la distancia dirigida de un punto **A** a un punto **B** lo podemos hacer restando a la coordenada del extremo del segmento, la coordenada del origen, lo que escribimos como:

$$d_{\overline{AB}} = x_2 - x_1$$

Por ejemplo, para calcular la distancia dirigida de **P(7)** a **Q(4)** primero construiremos la gráfica que nos permita visualizar de dónde a dónde vamos.



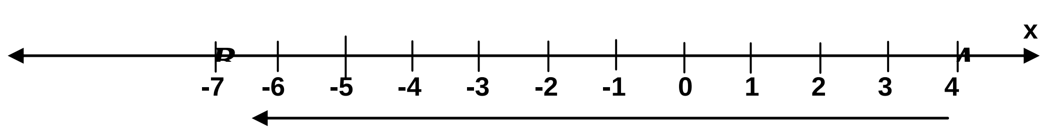
Ahora sustituimos en la ecuación de distancia dirigida entre dos puntos:

$$d_{\overline{PQ}} = x_2 - x_1$$
$$= 4 - 7$$
$$= -3$$

Esto significa que nos desplazamos en sentido negativo 3 unidades.

En el siguiente ejemplo obtendremos obtener la distancia dirigida de A(4) a B(-7).

Primero elaboremos la gráfica que nos permita analizar cómo nos desplazamos



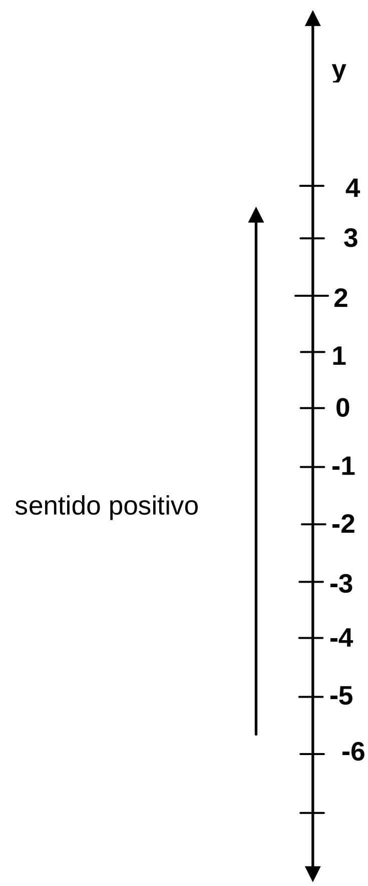
sustituyendo en la ecuación para calcular la distancia dirigida obtenemos que:

$$d_{\overline{AB}} = x_2 - x_1$$
$$= -7 - 4$$
$$= -11$$

Por lo que nuestro desplazamiento es en sentido negativo 11 unidades.

Este principio de cálculo de distancias dirigida se aplica también en segmentos dirigidos verticales.

A continuación determinaremos la distancia dirigida de **B** a **A** con los datos de la gráfica.



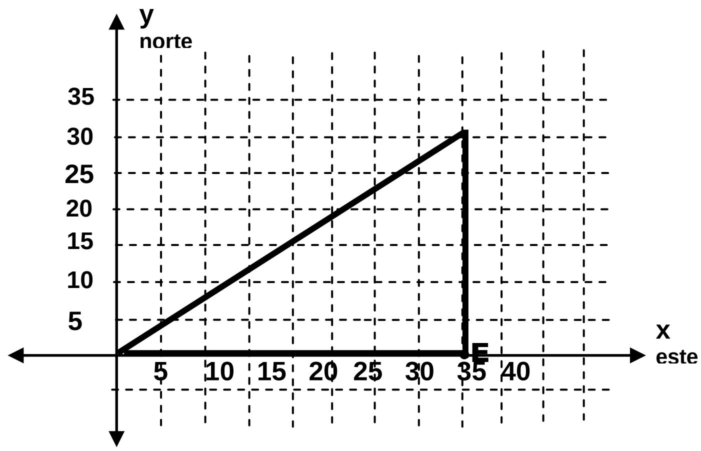
Sustituyendo en la ecuación

$$d_{\overline{BA}} = y_2 - y_1$$
$$= 4 - (-6)$$
$$= 4 + 6$$

= 10 unidades en sentido positivo

Analicemos otro ejemplo.

Un ciclista recorre 40 kilómetros en dirección este y luego se desplaza 30 kilómetros en dirección norte como se muestra en la figura. Se desea saber la distancia que hay del punto de partida a su posición final P.



Observa que tenemos formado un triángulo rectángulo en donde el ciclista primero se movió horizontalmente y después verticalmente, entonces aplicamos la ecuación para calcular distancias dirigidas, con lo que obtenemos:

Del origen hacia el este (horizontal)

$$\mathbf{d}\overline{OE} = x_2 - x_1$$
$$= 40 - 0$$
$$= 40$$

este valor lo consideramos $cateto_1 = c_1$
en donde *$c_1 = 40$*

Del origen hacia el norte (vertical)

$$\mathbf{d}\overline{EN} = y_2 - y_1$$
$$= 30 - 0$$
$$= 30$$

este valor es el $cateto_2 = c_2$
por lo que *$c_2 = 30$*

Los valores obtenidos corresponden a los catetos del triángulo rectángulo y la hipotenusa *h* es la distancia del punto de partida a la posición final, la cual calculamos aplicando el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

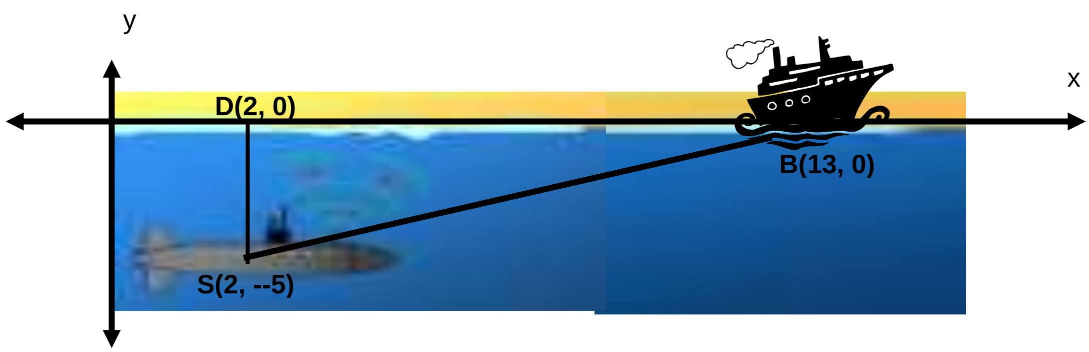
$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \quad \textbf{sustituyendo}$$
$$h^2 = 40^2 + 30^2$$
$$h^2 = 1600 + 900$$
$$h^2 = 2500$$
$$\sqrt{h^2} = \sqrt{2500}$$
$$h = 50$$

La distancia dirigida del origen a la posición final del ciclista es 50 kilómetros.

En seguida abordaremos algunos aspectos de distancia entre dos puntos.

Cuando se ubica en un sistema de coordenadas cartesianas la posición de una, dos o más figuras podemos calcular la distancia a que se encuentran del origen o la distancia que existe entre ellas, las mismas pueden representar problemas a escala de cartas de navegación, cálculo de perímetros de figuras, obtención de alturas y otros más.

Por ejemplo, un submarino se ubica en el mar con coordenadas **S(2, -5)** y en esos momentos detecta un barco sobre la superficie con coordenadas **B(13, 0)** respecto a un sistema de ejes cartesianos y se desea saber la distancia que hay del submarino al barco (ver figura).
Nota: las unidades están dadas en kilómetros,



Analizando la figura observamos que tenemos un triángulo rectángulo en donde los catetos son la distancia que hay del submarino al punto **D** y del punto **D** al barco, la hipotenusa es la distancia que existe entre el submarino y el barco por lo que podemos aplicar **el teorema de Pitágoras** que se expresa como:

$$\textbf{hipotenusa}^2 = (\textbf{Cateto}_1)^2 + (\textbf{Cateto}_2)^2$$

Calculemos primero la distancia del submarino a la superficie empleando la ecuación para calcular la longitud de un segmento (valor absoluto).

$$D = \left| x_2 - x_1 \right|$$

$$D_{\overline{SD}} = \left| -5 - 0 \right|$$

$$= \left| -5 \right|$$

$= 5$ a este resultado lo consideraremos el cateto 1

Determinemos ahora la distancia del punto **D** al barco

$$D_{\overline{DB}} = \left| 13 - 2 \right|$$

$$= \left| 11 \right|$$

$= 11$ este valor será el cateto 2

Aplicando el **teorema de Pitágoras:**

$$(D_{\overline{SB}})^2 = 5^2 + 11^2$$
$$(D_{\overline{SB}})^2 = 25 + 144$$
$$(D_{\overline{SB}})^2 = 169$$
$$\sqrt{(D_{\overline{SB}})^2} = \sqrt{169}$$
$$D_{\overline{SB}} = 13$$

la distancia del submarino al barco es 13 kilómetros

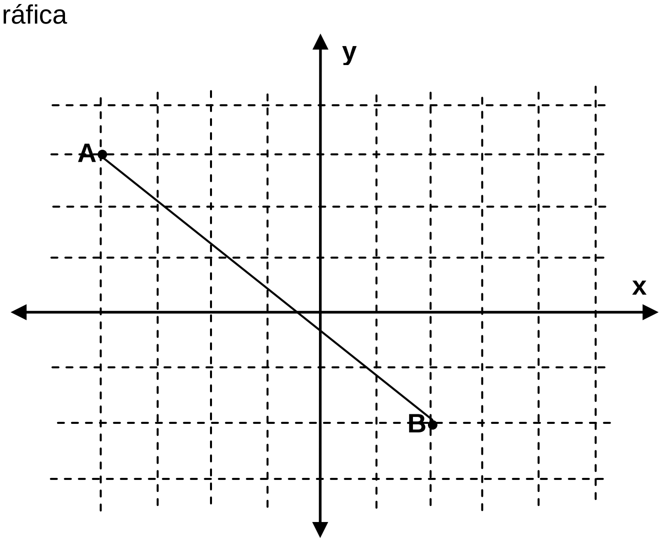
Observa que para calcular el cateto horizontal $\mathbf{C_h}$ y el cateto vertical $\mathbf{C_v}$ empleamos las ecuaciones: $\mathbf{C_h} = |x_2 - x_1|$ $\mathbf{C_v} = |y_2 - y_1|$, que para calcular el valor de la hipotenusa **h** se emplea $\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{c_h^2} + \mathbf{c_v^2}}$ y que sustituyendo nos queda la ecuación: $\mathbf{h} = \sqrt{(\mathbf{x_2 - x_1})^2 + (\mathbf{y_2 - y_1})^2}$ donde la hipotenusa es la distancia entre dos puntos cualesquiera, por lo que podemos escribir que la distancia entre dos puntos se calcula con la ecuación:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x_2 - x_1})^2 + (\mathbf{y_2 - y_1})^2}$$

En esta ecuación podemos tomar cualquiera de los puntos como (x_1 ,y_1) y el otro como (x_2 ,y_2).

En el siguiente ejemplo calcularemos la distancia que hay entre los puntos A(-4, 3) y B(2, -2).

Construyamos primero la gráfica



Sustituyendo las coordenadas del punto **A** y **B** en la ecuación de distancia entre dos puntos tenemos que:

$$d = \sqrt{(2-(-4))^2 + (-2-3)^2}$$

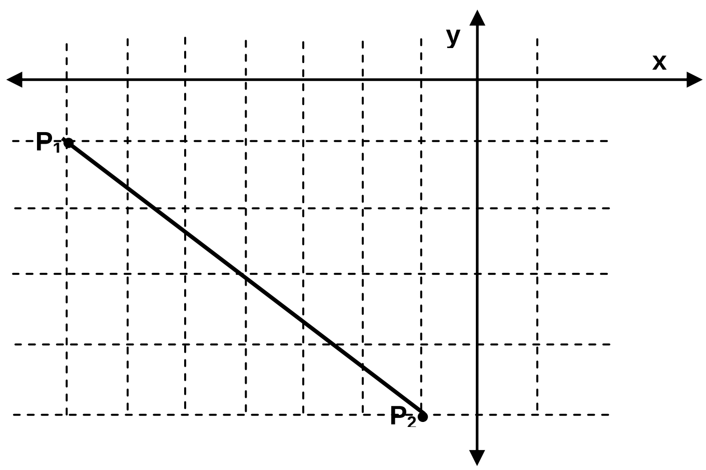
$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + 25}$$

$$= \sqrt{36+25}$$

$$= \sqrt{61} = 7.81 \text{ unidades}$$

Ahora analizaremos la gráfica y calcularemos la distancia entre los puntos.



Primero escribiremos las coordenadas de los puntos **P_1(-7, -1)** y **P_2(-1, -5)** y sustituiremos los valores en la ecuación de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(-1-(-7))^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{(-2+7)^2 + (-5+1)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (\ \ -4)^2}$$

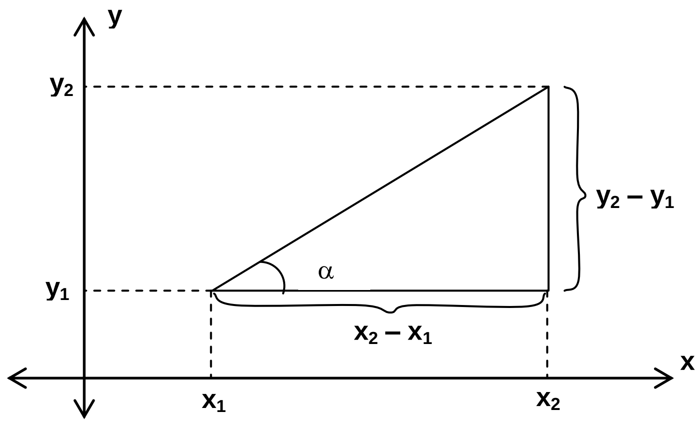
$$= \sqrt{25+16}$$

$$= \sqrt{41} \quad = 6.403 \text{ unidades}$$

A continuación revisaremos algunas ideas sobre **ángulo de inclinación y la pendiente de una recta**.

Cualquier recta en el plano cartesiano tiene una inclinación llamada pendiente la cual suele representarse por la letra *m,* puede ser calculada ya que la pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación que se escribe como: $m = \tan\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Analicemos la siguiente figura:

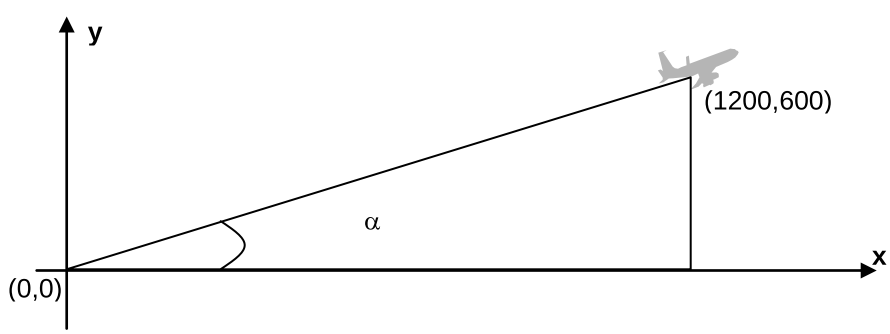


Observa que tenemos un triángulo rectángulo en el cual el cateto opuesto al ángulo **α** es $y_2 - y_1$ y el cateto adyacente $x_2 - x_1$ sustituyendo en la ecuación $m = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ tenemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta ecuación permite calcular el valor de la pendiente ***m.***

Por ejemplo, un avión cuando comienza a elevarse (movimiento ascendente) lo hace de manera diagonal, cuando se encuentra a 600 metros de altura la distancia horizontal es de 1200 metros (ver figura)



La pendiente de la diagonal que describe el movimiento del avión la calculamos como:

$$m = \frac{600 - 0}{1200 - 0}$$

$$m = \frac{600}{1200}$$

$$m = 0.5$$

El valor de la pendiente ***m*** para el movimiento ascendente del avión es positivo.

Para determinar el ángulo de inclinación $\angle\alpha$ de la recta con respecto a la horizontal utilizamos una calculadora científica (casio) en la cual seleccionamos la segunda función **inv**, después elegimos la tecla **tan,** continuamos escribiendo el número, en nuestro caso 0**.5** y pulsamos la tecla **exe** finalmente oprimimos la tecla **°** ⦶⦶⦶ con lo que obtenemos el ángulo

$$\angle\alpha = 26^{o}\ 33'\ 54''$$

Consideremos ahora este otro ejemplo.

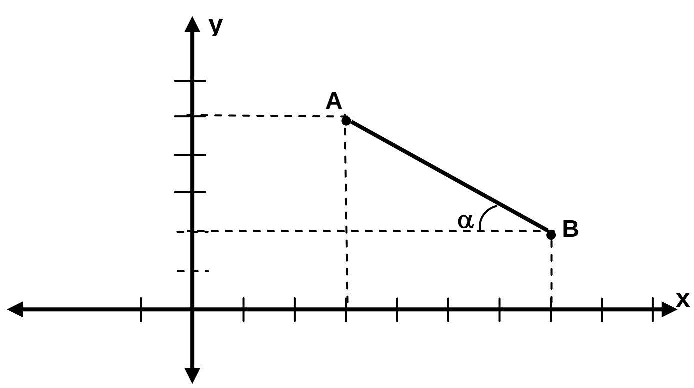
Si los extremos de un segmento son **A(3,5)** y **B(7,2)** calcular el valor de la pendiente y construir la gráfica.

Sustituyendo en la ecuación de la pendiente tenemos que:

$$m = \frac{2 - 5}{7 - 3}$$

$$m = \frac{-3}{4}$$

Tracemos la gráfica y formemos un triángulo rectángulo con paralelas a los ejes cartesianos



Observa que a partir del punto **A** si nos desplazamos tres unidades hacia abajo (cateto opuesto al $\angle\alpha$) y cuatro hacia la derecha (cateto adyacente al $\angle\alpha$) llegamos al punto **B,** y al comparar estos desplazamientos a partir del punto **A** con el valor de la pendiente tenemos lo siguiente:

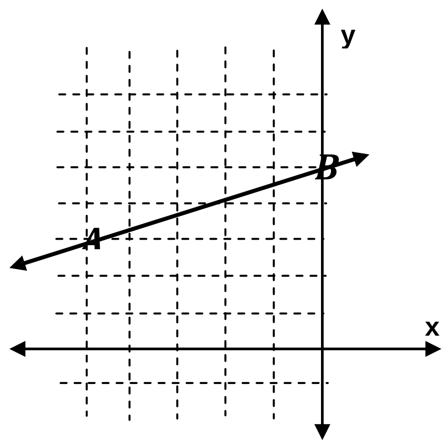
$$m = \frac{-3}{4}$$

- 3 = desplazamiento hacia abajo
4 = desplazamiento hacia la derecha

El valor de la pendiente ***m*** es negativo, "leyendo" la gráfica de izquierda a derecha observamos que el segmento es descendente.

Ejemplo 3

Haciendo un análisis de la siguiente gráfica calcularemos el valor de la pendiente de la recta.



Primero escribiremos las coordenadas de los puntos **A(-5, 3)** y **B(0, 5)**, ahora utilicemos la ecuación de la pendiente para determinar su valor:

$$m = \frac{5 - 3}{0 - (-5)}$$

$$m = \frac{2}{5}$$

Observa que a partir del punto **A** se tiene un desplazamiento de dos unidades hacia arriba y de cinco unidades hacia la derecha para llegar al punto **B,** que al compararlo con el valor obtenido de la pendiente, tenemos que:

$$m = \frac{2}{5}$$

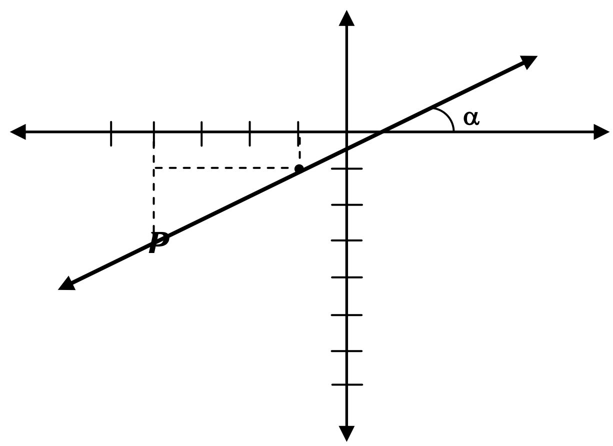
2 = desplazamiento hacia arriba
5 = desplazamiento hacia la derecha

El valor d la pendiente ***m*** es positivo y la recta es ascendente. Analizando los ejemplos anteriores notamos que **si una recta o segmento asciende, el valor de la pendiente *m* es positivo y que si una recta o segmento desciende, el valor de la pendiente *m* resulta negativo**.

Veamos otro caso.

Una recta pasa por el punto **P(-4, -3)** y tiene una pendiente ***m = 2/3*** trazaremos la gráfica y calcularemos el ángulo de inclinación que forma con el eje **"x"**.

Primero ubicamos el punto **P** y empleando el valor de la pendiente realizamos un desplazamiento hacia arriba de dos unidades y un desplazamiento hacia la derecha de tres unidades donde colocamos otro punto, el cual unimos con **P** con una recta que prolongamos hasta que cruce el eje **"x"** en donde se forma el ángulo $\angle\alpha$, obteniendo la gráfica siguiente:



Como **m = 2/3** *esto significa que* ***tan*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***= 2/3*** *realizando la división con una aproximación de cuatro dígitos después del punto decimal tenemos* ***Tan*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***= 0.6667*** *Para determinar el valor del ángulo con calculadora pulsamos las teclas en el orden siguiente:*

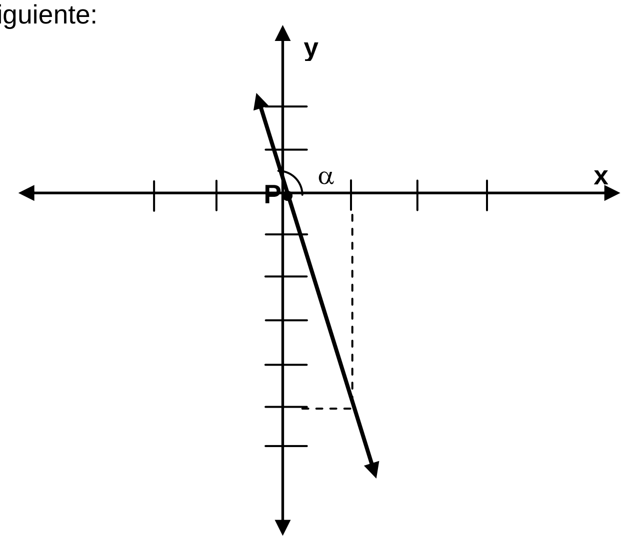
Inv tan 0.6667 exe º ´"

con lo que obtenemos el valor del ángulo $\angle\alpha$

$\angle\alpha$ = 33º 41´ 29"

En el siguiente caso trazaremos la gráfica y calcularemos el valor del ángulo $\angle\alpha$ de una recta que pasa por el origen y tiene una pendiente *m = -5*

Como ***m = -5*** *lo* podemos escribir como ***m = -5/1***, para construir la gráfica, primero ubicaremos el punto **P** en el origen y a partir del nos movemos una unidad a la derecha y cinco unidades para abajo con lo que obtenemos la gráfica siguiente:



Ya que **m = -5,** *entonces,* ***tan*** α ***= -5.*** *Para determinar el valor del ángulo con calculadora pulsamos las teclas en el orden siguiente:*

Inv   tan   -5   exe   º ´"   con lo que obtenemos el valor del ángulo $\angle\alpha$

$$\angle\alpha = 101^\circ\ 18'\ 35.75''$$

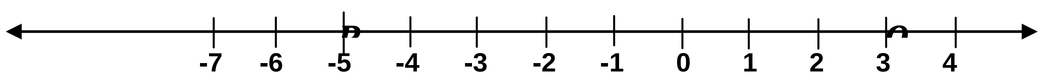
EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1. (   ) La distancia dirigida de **A(6)** a **B(-3)** es**.**

   a) -3
   b) 9
   c) 3
   d) -9

2. (   ) Analiza la gráfica.



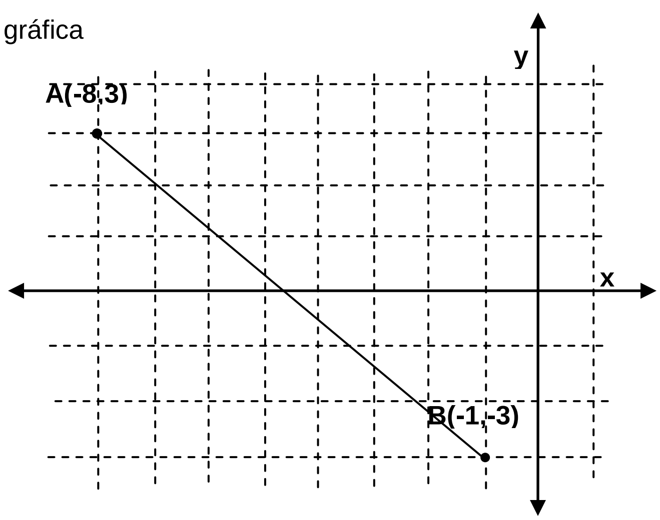
La distancia dirigida $d_{\overline{PQ}}$ vale:

   a) 8
   b) -8
   c) 2
   d) -2

3. (   ) La distancia dirigida de **A(-6)** a **P(x)** es **–5** entonces la coordenada de **P** vale:

   a) -11
   b) 11
   c) 1
   d) -1

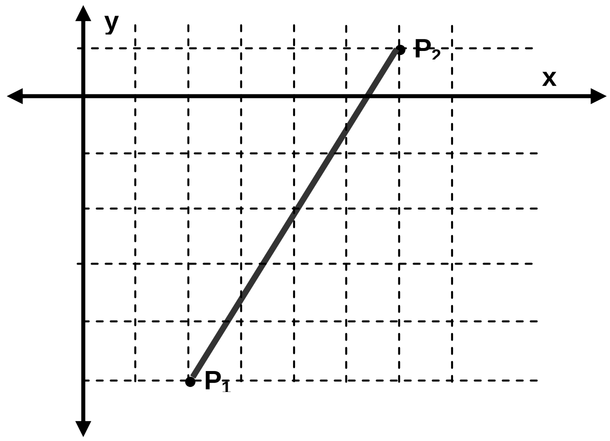
4. (   ) Analiza la siguiente gráfica



Utilizando las coordenadas de los puntos **A** y **B** la distancia entre ellos mide:

   a) 10.816 u
   b) 9 u
   c) 9.219 u
   d) 7 u

5. (   ) Analiza la gráfica.



La distancia que hay entre los puntos es:

a) 5.657 u
b) 7.211 u
c) 8.944 u
d) 10 u

6. (   ) Sean las coordenadas de los puntos **A(7, -3)** y **B(10, 9)**, la distancia entre ellos es:

a) 18.027
b) 12.369
c) 6.708
d) 20.808

INSTRUCCIONES: Lee cada uno de los reactivos y realiza lo que se solicita

7. (   ) Si los vértices de un triángulo son: $\mathbf{v_1(0, 0)}$, $\mathbf{v_2(8, 0)}$ y $\mathbf{v_3(8,6)}$.

I Cuánto mide su perímetro.

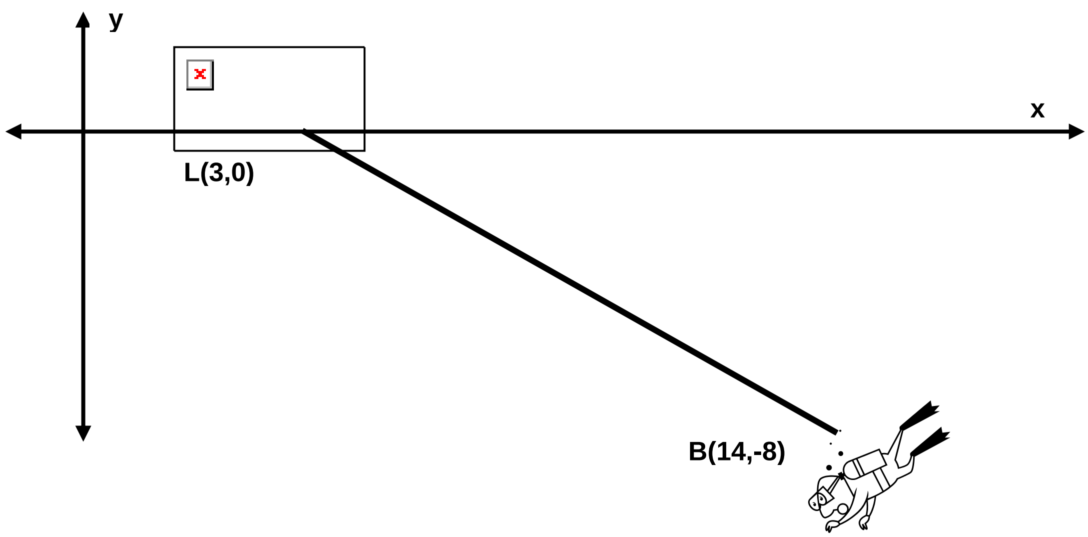
a) 14
b) 100
c) 10
d) 24

II Construye la gráfica correspondiente.

8. Un grupo de niños que juegan a las fuerzas jalan una cuerda hacia el este con valor de 400 N, mientras otros niños jalan la misma cuerda hacia el oeste con fuerza de 360 N:

I El sentido de la resultante es ________________________________
II La resultante vale: ____

9. Al ubicar a una “buza” en un sistema de ejes cartesianos (ver figura), ésta se encuentra en **B(14, 8)** y un lanchero en **L(3, 0),** la distancia dad en metros, que hay entre el lanchero y la buza mide: _________



10. (   ) Los extremos de un segmento son **P(-5, -3)** y **Q(4, 3)**, cuánto vale el valor de su pendiente:

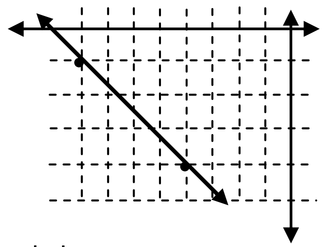
a) $m = \frac{2}{3}$

b) $m = \frac{-2}{3}$

c) $m = \frac{3}{2}$

d) $m = \frac{-3}{2}$

11. (   ) Analiza la gráfica.



la pendiente de la recta es:

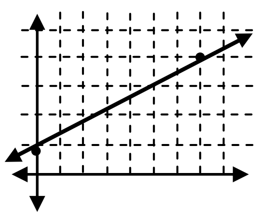
a) $m = \frac{3}{4}$

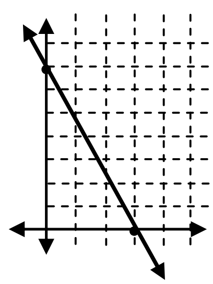
b) $m = \frac{4}{3}$

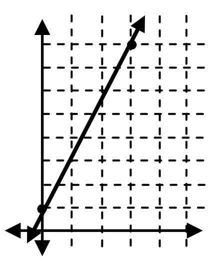
c) $m = \frac{-3}{4}$

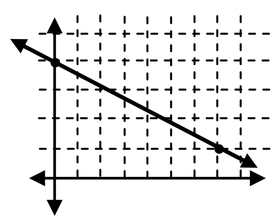
d) $m = \frac{-4}{3}$

12. (   ) Si la pendiente de una recta es $m = \frac{-3}{7}$ la gráfica se representa como:

a) 

b) 

c) 

d) 

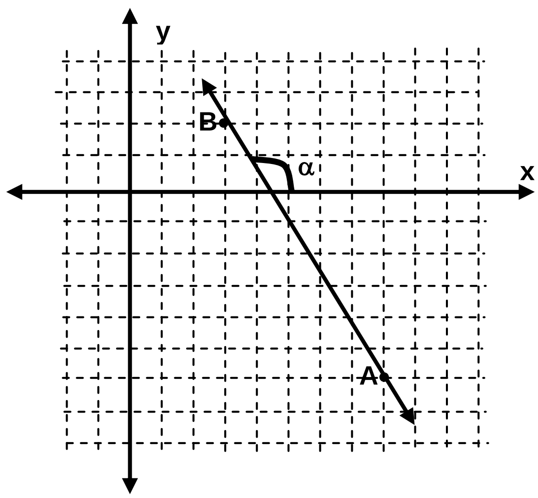
13. (   ) Los extremos de un segmento son L(-5, -4) y M(4, 6) por lo que su ángulo de inclinación con respecto al eje "x" mide:

a) $\angle\alpha$ = 41º 51´ 13"
b) $\angle\alpha$ = 12º 31´ 43"
c) $\angle\alpha$ = 48º 0´ 46"
d) $\angle\alpha$ = 45º

14. ( ) Una recta pasa por el origen y por el punto P(2, 7) por lo que su ángulo de inclinación con el eje "x" mide:

a) $\angle\alpha$ = 15º 56´ 43"
b) $\angle\alpha$ = 74º 03´ 16"
c) $\angle\alpha$ = 105º 56´ 43"
d) $\angle\alpha$ = 164º 03´ 16"

15. ( ) Analiza los puntos por donde pasa la recta en esta gráfica.

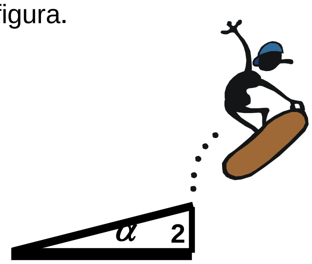


el ángulo de inclinación mide:

a) $\angle\alpha$ = 38º 39´ 35"
b) $\angle\alpha$ = 141º 20´ 24"
c) $\angle\alpha$ = 51º 20´ 24"
d) $\angle\alpha$ = 128º 39´ 35"

INSTRUCCIONES: Lee los siguientes reactivos y escribe sobre la línea lo que se te solicita.

16. En un torneo de saltos de esquí acuático la rampa se eleva una altura de 2 m sobre una balsa de 6 m de largo como se muestra en la figura.

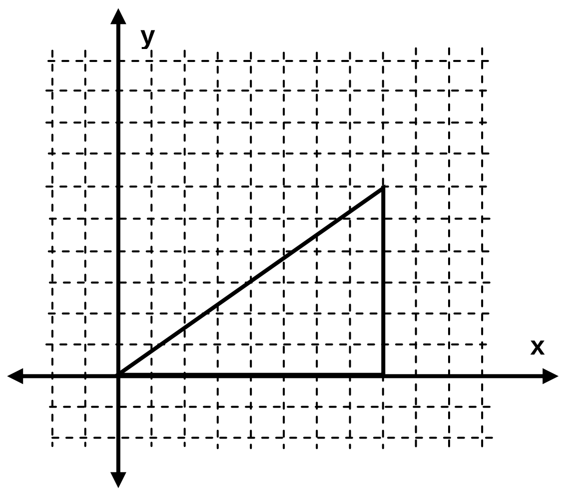


I ¿cuál es la pendiente de la rampa? ______________________________

II ¿cuál es el valor del ángulo $\angle\alpha$ de inclinación de la rampa? ______________

17.. Si una recta es ascendente, entonces la pendiente tiene signo __________________

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	d)
2	a
3	a
4	c
5	b
6	b
7	I 24 II 
8	I Positivo II 40 N
9	13.601 m
10	a
11	d
12	d
13	c
14	b
15	b
16	a) ***m = 2/6*** **b)** $\angle\alpha$ **= 18º 26´ 05”**
17	Positivo

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

A continuación se te presentan una serie de ejercicios con la finalidad de que reafirmes tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas

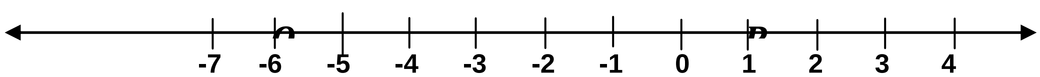
Cuentas con 60 minutos para resolverlos

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta, utiliza hojas aparte en donde deberás anotar todos los procedimientos que empleaste en la resolución.

1. (   ) La distancia dirigida de **Q(8)** a **P(x)** es **–8** entonces la coordenada de **P** vale:

   a) -16
   b) 16
   c) 0
   d) -8

2. (   ) Analizando la gráfica.



La distancia dirigida $d_{\overline{PQ}}$ vale:

   a) 7
   b) -7
   c) 5
   d) -5

3. (   ) Sean las coordenadas de los puntos **A(4, -5)** y **B(9, 6)** la distancia entre ellos es:

   a) 5.099
   b) 13.038
   c) 17.029
   d) 12.083

4. (   ) Si los vértices de un triángulo isósceles son: $\mathbf{v_1(-4, -1)}$, $\mathbf{v_2(-1, 3)}$ y $\mathbf{v_3(2, -1)}$ calculando la distancia entre dos puntos con una aproximación de dos dígitos después del punto decimal, su perímetro mide:

   a) 18.8
   b) 13.22
   c) 16.40
   d) 16

5. (   ) Si la pendiente de una recta es negativa, entonces la recta:

   a) Desciende
   b) Es horizontal
   c) Asciende
   d) Es vertical

6. (   ) Los extremos de un segmento son **P(-6, 5)** y **Q(-4, 8)**, porlo tanto el valor de su pendiente vale:

a) $m = \frac{2}{3}$

b) $m = \frac{3}{2}$

c) $m = \frac{-3}{2}$

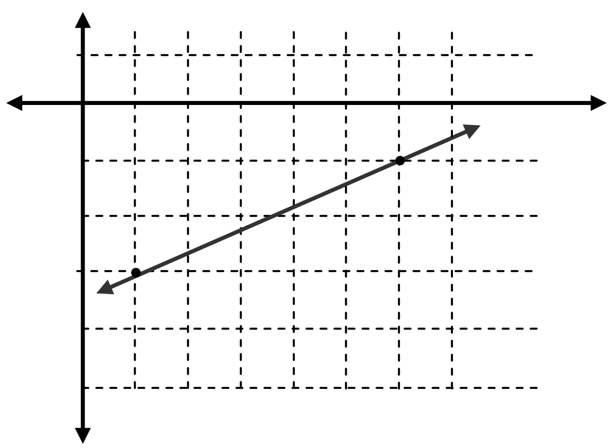
d) $m = \frac{-2}{3}$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y realiza lo que se solicita.

7. Al dirigirse de un punto **S** a un punto **U** el resultado es 13, entonces el sentido del recorrido es

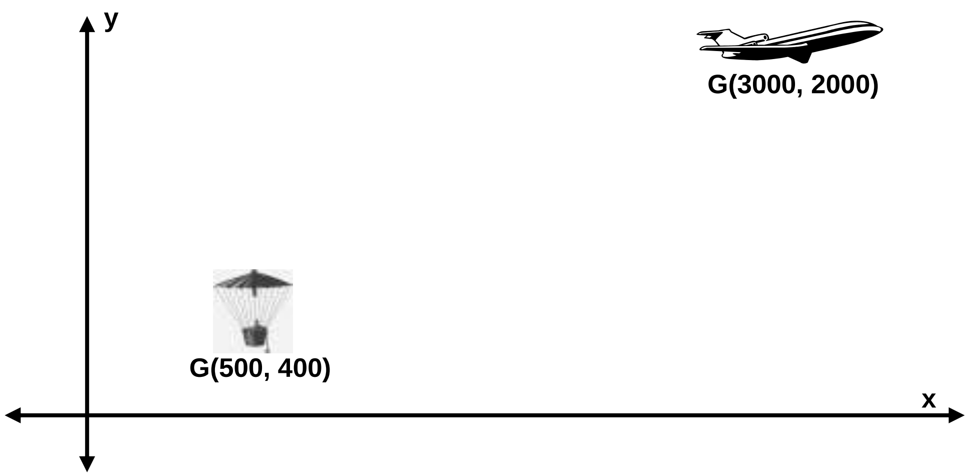
____

8.. Observa los puntos por donde pasa la recta.



El valor de la pendiente ***m*** es: ___________________________

9. Analiza la siguiente figura, sus coordenadas están dadas en metros



¿Cuánto mide la distancia entre el globo y el avión? ____________________

10. Si una recta es descendente, entonces la pendiente tiene signo _________________

11. Si una recta pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 45º , entonces el valor de la pendiente vale _________________

12. Los trabajadores de mudanzas emplean una rampa de madera cuya base mide 2 m y 1.5 m, de altura, como se observa en la figura.

I ¿Cuál es la pendiente *m* de la rampa? ____

II ¿ Cuál es el valor del ángulo de inclinación? _________________________________

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	c
2	b
3	d
4	d
5	a
6	b
7	Positivo
8	$m = -2/5$
9	2968.16 metros
10	Negativo
11	1
12	a) $m = 0,75$ b) $\angle\alpha = 36^{o}\ 52'\ 11''$

Unidad II

La Línea Recta

TEMA 2.1. ECUACIONES Y PROPIEDADES DE LA RECTA

APRENDIZAJES
• Obtener la ecuación de la recta conociendo su pendiente y un punto, en la resolución de problemas. • Construir la gráfica de la recta punto pendiente.

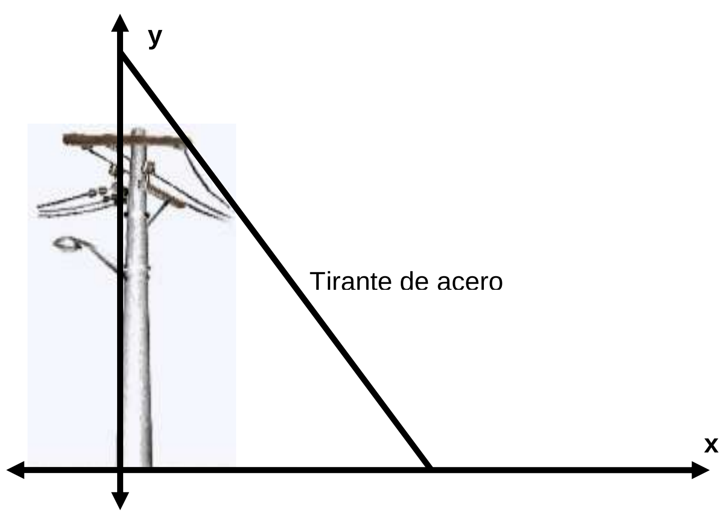
Todas las rectas que no son paralelas al eje **“y”** tienen la característica de que intersectan a dicho eje en algún punto **P**, el cual se representa como **P(0, b);** si además conocemos el valor de la pendiente “***m***, entonces podemos determinar la ecuación de la recta que intersecta el eje **“y”**.

De manera general, podemos establecer una regla para construir la gráfica de cualquier recta en la que conocemos las coordenadas del punto **P** por donde pasa y el valor de la pendiente **m**, primero ubicamos el punto y a partir de el nos desplazamos hacia la derecha o hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo el número de unidades que indiquen los valores del numerador y denominador de la pendiente como se muestra en la tabla.

Tabla para signos y desplazamientos

1 $m=\dfrac{valor(+)\text{ hacia arriba}}{valor(+)\text{ hacia la derecha}}$	2 $\text{m}=\dfrac{\text{valor}(-)\text{ hacia abajo}}{\text{valor}(+)\text{ hacia la derecha}}$
3 $m=\dfrac{valor(-)\text{ hacia abajo}}{valor(-)\text{ hacia la izquierda}}$	4 $m=\dfrac{valor(+)\text{ hacia arriba}}{valor(-)\text{ hacia la izquierda}}$

Por ejemplo: Un poste de luz de 8m de altura está sujeto por un tirante de acero ubicado a 6 m de la base del poste (ver figura).



Considerando que el cable está tenso como una recta calcularemos su ecuación.

Como la altura del poste es 8m, significa que las coordenadas del extremo a donde llega el cable sobre el eje **"y"** son **P_1(0, 8)** y las coordenadas donde intersecta el eje **"x"** son **P_2(6, 0),** si empleamos el punto **P_1** y a partir de este calculamos la pendiente:

$$m = \frac{-8}{6}$$

Por lo que la ecuación de la recta punto pendiente es:

$$y - 8 = \frac{-8}{6}(x - 0)$$

simplificando: $y - 8 = \frac{-4}{3}x$

despejando y: $y = \frac{-4}{3}x + 8$

A esta ecuación se le conoce como ecuación de la recta pendiente ordenada al origen que matemáticamente se escribe como:

y = m x + b

En donde a **b** se le llama **ordenada al origen**

El valor de **b = 8** *representa el punto donde la recta intersecta al eje* ***"y"*** *que en nuestro ejemplo es la altura del poste.*

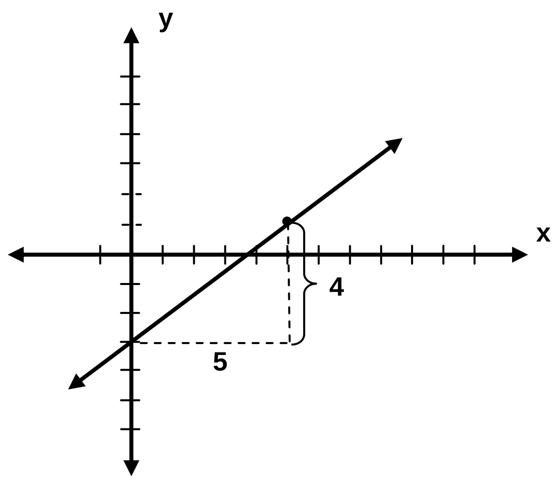
Analicemos este otro ejemplo:

Vamos a escribir la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen, si ***m = 4/5*** y el valor de ***b = - 3***, y después trazaremos la gráfica.

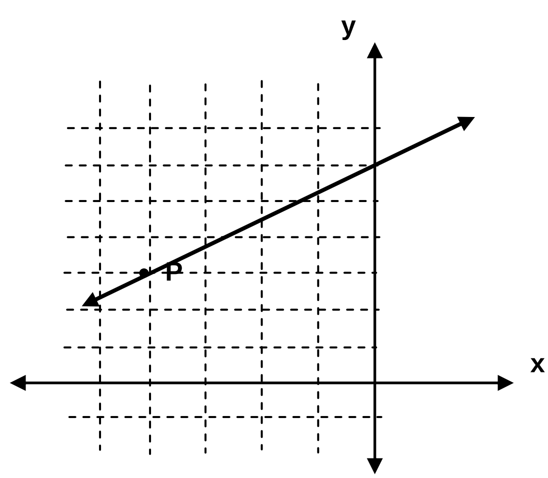
Sustituyendo el valor de la pendiente y el de la ordenada al origen tenemos:

$$y = \frac{4}{5}x - 3$$

Ahora ubiquemos el valor de la ordenada al origen ***b = -3*** sobre el eje **"y",** a partir de él nos desplazamos 5 unidades hacia la derecha (valor del denominador de la pendiente) y 4 unidades hacia arriba (valor del numerador de la pendiente) (visto en la tabla para signos y desplazamientos) por lo que la gráfica nos queda de la manera siguiente:



En el siguiente ejemplo vamos a analizar la gráfica, obtener el valor de la pendiente, el valor de la ordenada al origen y determinar la ecuación de la recta.



Para dar respuesta a las preguntas primero observemos que la ordenada al origen (valor donde la recta intersecta el eje **"y"**) es: ***b = 6***

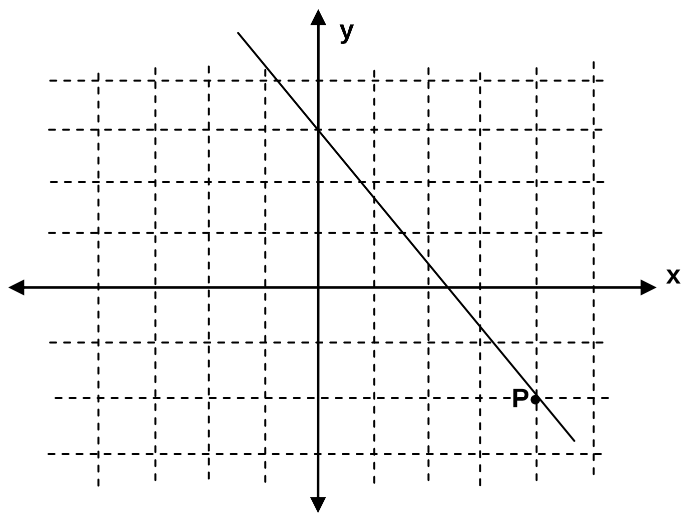
Tomando como referencia el punto **P** y el punto donde la recta intersecta el eje **"y",** a partir del punto **P** hay un desplazamiento de 4 unidades hacia la derecha y de 3 unidades hacia arriba por lo que el valor de la pendiente es:

$$m = \frac{3}{4}$$

Por lo que la ecuación de la recta la escribimos como:

$$y = \frac{3}{4}x + 6$$

Como verás en este otro ejemplo, tomaremos como referencia el punto P y el punto donde la recta intersecta el eje "y", para escribir la ecuación de la recta.



La recta intersecta al eje **"y"** en ***b* = *3*,** a partir de la intercepción se desplaza 4 unidades hacia la derecha y 5 unidades hacia abajo por lo que la pendiente $m = \frac{-5}{4}$ entonces la ecuación de la recta es:

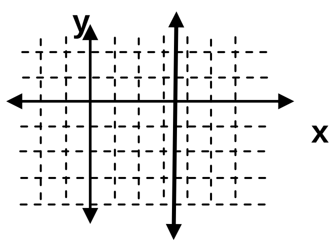
$$y = \frac{-5}{4}x + 3$$

EJERCICIOS

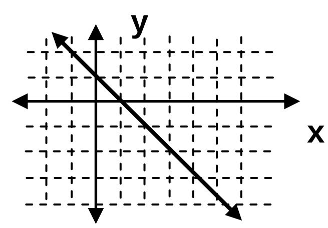
INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1. ( ) La gráfica de la $y = \frac{2}{5}x - 3$ **recta es:**

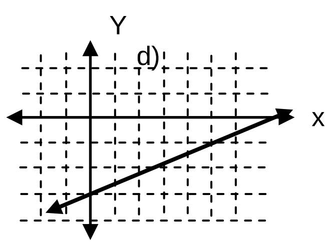
a)



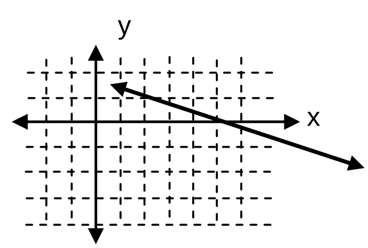
b)



c)

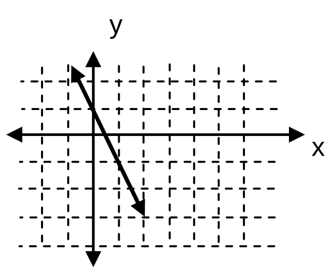


d)

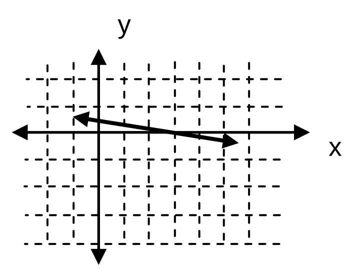


2. ( ) Si una recta tiene como pendiente ***m = - 2*** y su ordenada al origen es ***b = 1,*** su gráfica será:

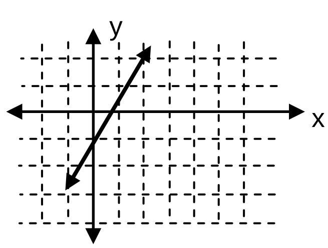
a)



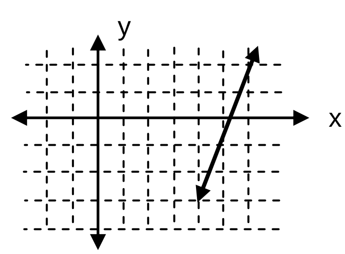
b)



c)

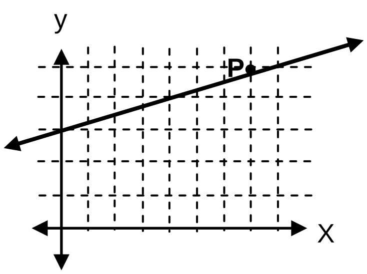


d)



INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita

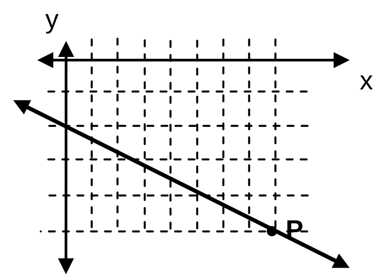
3. Analiza la siguiente gráfica.



La ecuación de la recta correspondiente es:

____

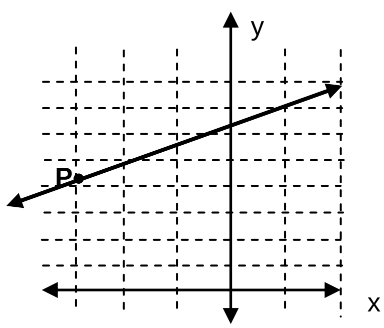
4. Analiza la siguiente gráfica.



La ecuación de la recta correspondiente es:

____

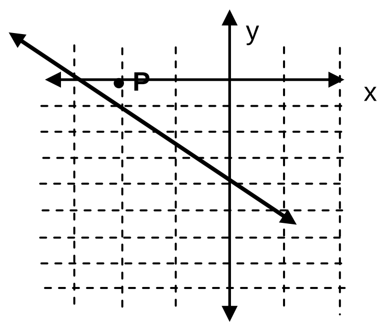
5. Analiza la siguiente gráfica.



La ecuación de la recta correspondiente es:

____

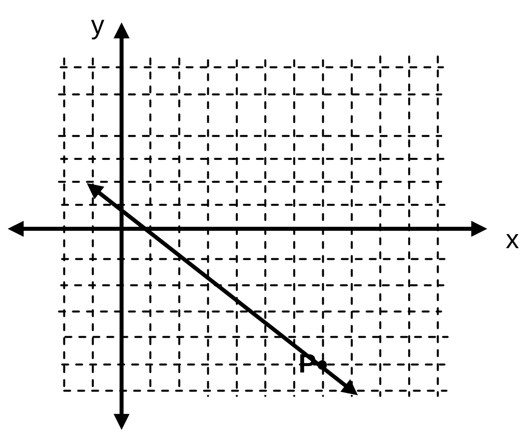
6. Analiza la siguiente gráfica.



La ecuación de la recta correspondiente es:

____

Analiza la siguiente gráfica.



7. La ecuación de la recta correspondiente es: _______________________

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	c
2	a
3	$y = \frac{2}{7}x + 3$
4	$y = \frac{-3}{8}x - 2$
5	$y = \frac{2}{3}x + 6$
6	$y = \frac{-3}{2}x - 4$
7	$y = \frac{-6}{7}x + 1$

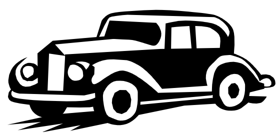
TEMA 2.2. FORMA PENDIENTE ORDENADA AL ORIGEN

APRENDIZAJES

- Determinar la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen en la solución de problemas
- Representar gráficamente la recta pendiente ordenada al origen

La ecuación de una recta es una expresión algebraica en dos variables, que, junto con su gráfica, se utiliza como modelo de diversas situaciones: tasa de crecimiento de una población, alquiler de autos, forma en que se vacía una alberca, estatura aproximada de una persona conocido el tamaño del hueso llamado "tibia", conversión de pesos mexicanos a dólares y viceversa, etc. Por lo anterior es importante el estudio de la línea recta en sus diferentes formas, así como las características de cada una de ellas, particularmente importante es entender cómo deducir la ecuación correspondiente a partir de la construcción de su gráfica.

Veamos el siguiente ejemplo. En una agencia que renta autos se observa el siguiente anuncio



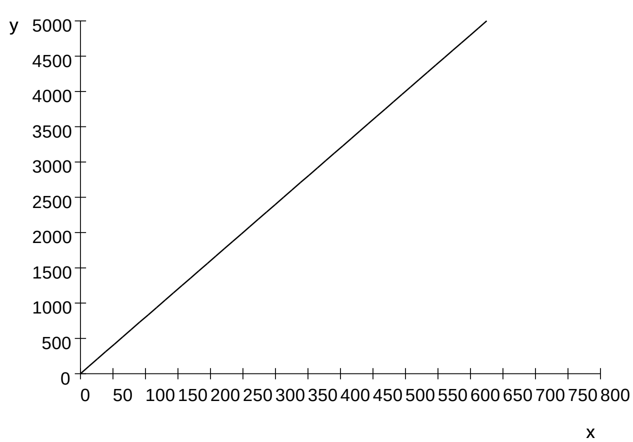
SE RENTA
$8 por km
recorrido mínimo

Vamos a construir la gráfica correspondiente y a deducir la ecuación de la recta punto pendiente que representa esta situación.

Elaboraremos una tabla con el costo de alquilar del auto para 100, 150, 200, 300, 450 y 600 km

Km: **x**	100	150	200	300	450	600
Costo $: **y**	800	1200	1600	2400	3600	4800

Si ubicamos los puntos en un sistema de ejes coordenados y los unimos mediante una línea obtenemos la gráfica siguiente:



Observa que todos los puntos están sobre la línea.

Nota: Cualquier línea recta tiene la particularidad de que al tomar dos puntos cualesquiera de ella y calcular su pendiente, ésta siempre es la misma.

Calculemos ahora el valor de la pendiente con la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ empleando las primeras dos parejas de valores

$$m = \frac{1200 - 800}{150 - 100}$$

$m = \frac{400}{50}$ entonces ***m = 8***

Tomemos ahora las parejas (200, 1600) (450, 3600) y calculemos su pendiente

$$m = \frac{3600 - 1600}{450 - 200}$$

$m = \frac{2000}{250}$ entonces ***m = 8***

Sin importar qué parejas de puntos tomemos, el valor de la pendiente es el mismo ***m = 8*,** al tomar el

x_1 y_1

primer punto **P_1 (100, 800)** y cualquier otro punto P(x, y) la pendiente entre **P_1** y **P** también es ***m = 8***,

es decir, $\frac{y - 800}{x - 100} = 8$, que podemos escribir como:

$$y - 800 = 8(x - 100)$$

A esta ecuación se le llama **ecuación de la recta punto-pendiente** que matemáticamente se escribe de la siguiente forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si tenemos el valor de la pendiente de una recta y un punto por donde pasa, podemos escribir su ecuación y construir su gráfica.

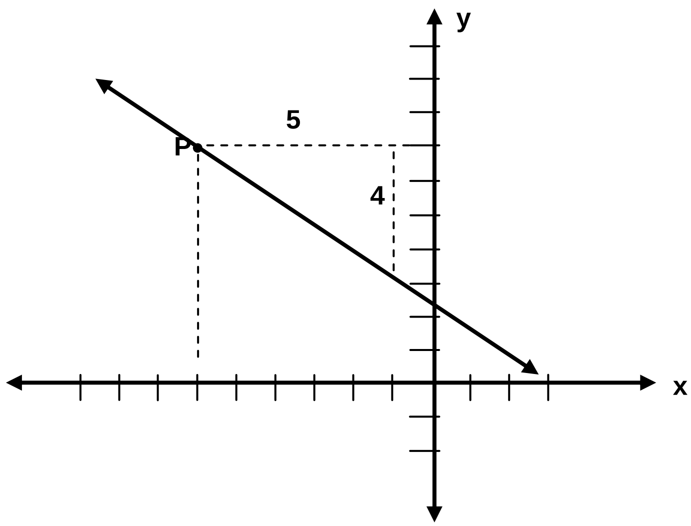
En el siguiente ejemplo vamos determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es *m = - 4/5* y pasa por el punto P(-6, 7).y a trazar su la gráfica.

Sustituyendo en la ecuación $y - 7 = \frac{-4}{5}(x - (-6))$

$y - 7 = \frac{-4}{5}(x + 6)$; que es la ecuación solicitada.

Para la construcción de la gráfica, primero ubicamos el punto **P(- 6, 7)**, a partir de él nos desplazamos **5** unidades hacia la derecha (valor del denominador de la pendiente) y **4** unidades hacia abajo (valor negativo del numerador de la pendiente), con lo que obtenemos la siguiente gráfica:

(Aplica la tabla para signos y desplazamientos vista previamente)



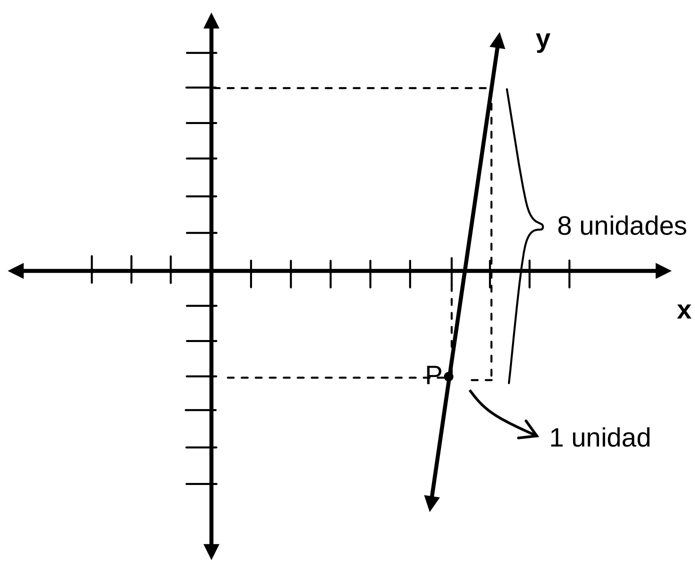
Veamos otro ejemplo.

A partir de la ecuación $y+3=4(x-6)$ indica el punto **P** por donde pasa, el valor de la pendiente y construye la gráfica

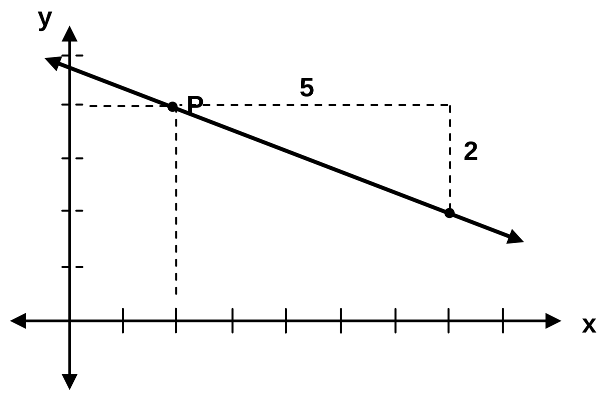
El punto por donde pasa es **P(6,- 3),** observa que al escribir las coordenadas se cambian los signos de los valores que representan del punto.

El valor de la pendiente es ***m = 8*** la cual podemos escribir como: $m=\frac{8}{1}$

La gráfica de la ecuación se construye graficando el punto **P**, a partir de él nos desplazamos **1** unidad hacia la derecha y **8** unidades hacia arriba, obteniendo la gráfica siguiente:



En este otro ejemplo, vamos a analizar la gráfica y determinar las coordenadas del punto **P** por donde pasa la recta, el valor de la pendiente y la ecuación de la recta.



Solución: Las coordenadas del punto son: **P(2,4)**; empleando la **tabla para signos y desplazamientos** de la pendiente tenemos que: $m = \frac{-2}{5}$

La ecuación de la recta se escribe como: $y - 4 = \frac{-2}{5}(x - 4)$

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1. (   ) La ecuación de la recta cuya pendiente es m = -3/4 y pasa por el punto P(-2,3) se representa como:

   a) $y-3=\frac{-3}{4}(x+2)$

   b) $y+3=\frac{-3}{4}(x+2)$

   c) $y-3=\frac{-3}{4}(x-2)$

   d) $y+3=\frac{-3}{4}(x-2)$

2. (   ) En la recta *y + 7 = 4 (x – 5)* el valor de la pendiente y el punto por donde pasa son:

   a) *m = 4   P(5, 7)*

   b) *m = 4   P(5, -7)*

   c) *m = ¼ P(5, 7) 7*

   d) *m = ¼ P(5, -7)*

3. (   ) Una recta tiene pendiente m = 2/5 y pasa por el punto P(7, -8), entonces su ecuación es:

   a) $\boldsymbol{y-8=\frac{2}{5}(x+7)}$

   b) $\boldsymbol{y+8=\frac{2}{5}(x-7)}$

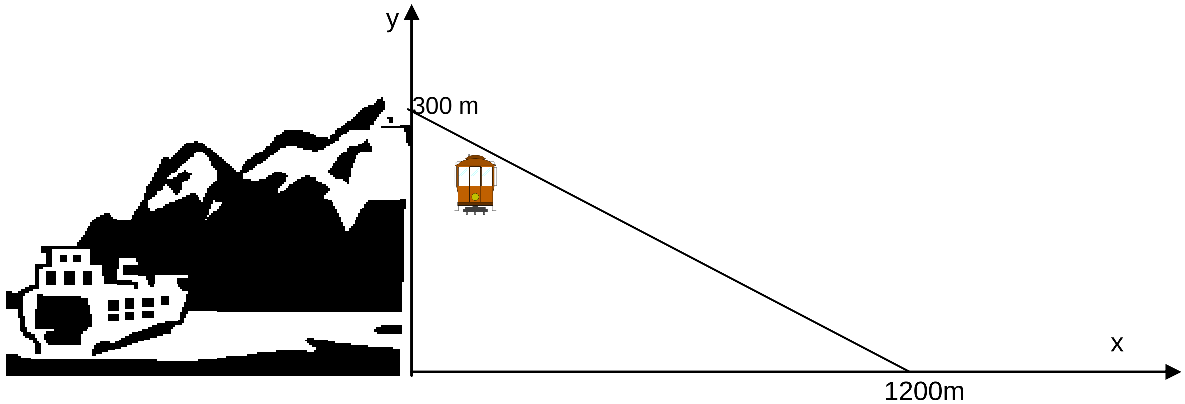
   c) $\boldsymbol{y-8=\frac{2}{5}(x-7)}$

   d) $\boldsymbol{y+8=\frac{2}{5}(x+7)}$

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y anota sobre la línea la respuesta correcta.

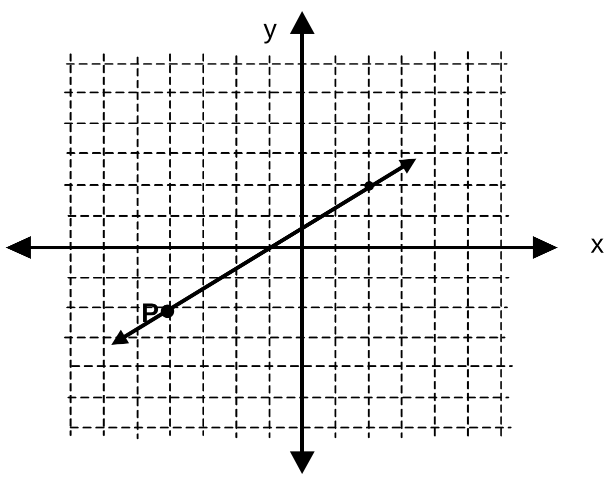
4. Una recta con pendiente ***m = - 2/3*** pasa por el punto **P(3, -4)**, si la abscisa de un punto **Q** que está en esa recta es **6**, la ordenada de **Q** vale ___________________.

5. La siguiente figura representa un teleférico que se mueve en línea recta y de manera diagonal, tomando como referencia el punto donde corta el eje "y", la ecuación de la recta que describe el movimiento del teleférico se escribe cómo ______________________.



Analiza la siguiente gráfica.

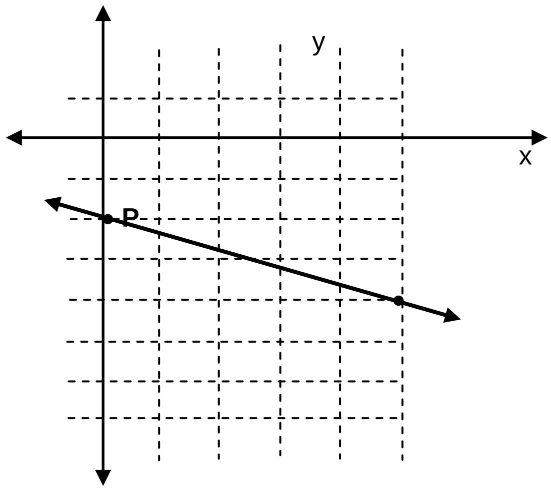
6.



La ecuación de la recta que le corresponde es:

____

7. Analiza la siguiente gráfica



La ecuación de la recta que le corresponde es:

____

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	a
2	b
3	b
4	y = -6
5	$y - 300 = \frac{1x}{4}$
6	$y + 2 = \frac{3}{2}(x + 4)$
7	$y + 2 = \frac{-2}{5}x$

TEMA 2.3. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

APRENDIZAJES
• Transformar la ecuación de una recta a la forma general y viceversa.

Hasta el momento hemos revisado algunas ecuaciones de la recta, las cuales pertenecen a formas lineales en dos variables **x, y**. **La forma lineal llamada ecuación general asociada a una recta se escribe como:** ***Ax + By + C = 0***; en la cual A, B Y C son números reales, en donde A y B *no* tienen el valor de cero simultáneamente.

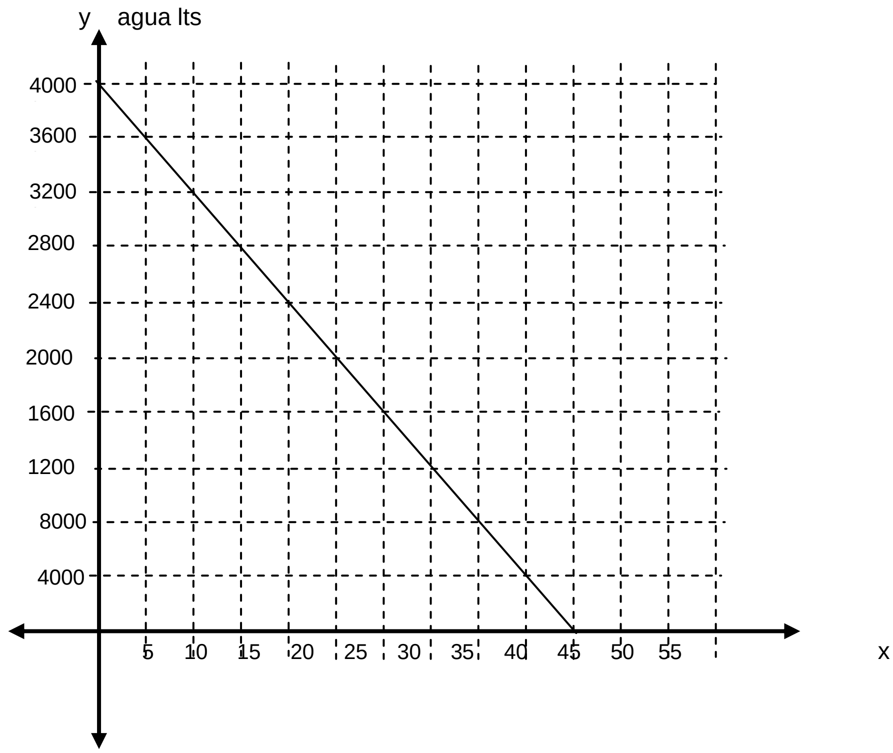
Si realizamos un proceso algebraico adecuado podemos transformar las ecuaciones de la recta a la ecuación general y viceversa.

Por ejemplo, analicemos la siguiente situación: La alberca de la UNAM contiene 40000 litros de agua y para limpiarla es vaciada en 50 minutos a razón de 800 litros por minuto.

Si elaboramos una tabla que muestre la forma en que la alberca va perdiendo agua obtenemos.

Tiempo "**x**" en minutos	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
agua "**y**" en litros	40000	36000	32000	28000	24000	20000	16000	12000	8000	4000	0

Ahora construyamos la gráfica con las parejas(x, y) de datos de la tabla.



Analizando la gráfica escribamos la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen tomando los primeros cinco minutos:

$$y = \frac{-4000x}{5} + 40000$$

multiplicando por 5, *5y = -4 000x + 200 000*

igualando a cero, *-4 000x + 5y – 200 000 = 0*

que es la ecuación general de la recta

Revisemos otro ejemplo: tenemos la ecuación de una recta con pendiente conocida que pasa por un punto dado $y + 3 = \frac{4}{3}(x - 2)$

multiplicando por 3 la ecuación tenemos:

3y + 9 = 4(x – 2)

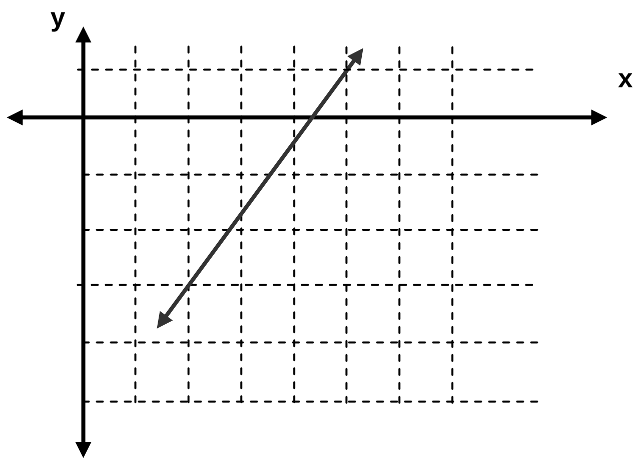
simplificando, *3y + 9 = 4x – 8*

igualando a cero, *-4x + 3y + 9 + 8 = 0*

reduciendo, *-4x + 3y + 17 = 0*

que es la ecuación general de la recta.

La gráfica correspondiente es:



Otra forma de la ecuación de una recta es la **ecuación de la forma simétrica**, como se ejemplifica a continuación.

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$$

al multiplicar por –4 tenemos, $(-4)\left[\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1\right]$

efectuando la operación, $\frac{-4x}{-4}+\frac{-4y}{-3}=-4(1)$

simplificando, $x+\frac{-4y}{-3}=-4$

operando los signos, $x+\frac{4y}{3}=-4$

multiplicando por 3, $(3)\left[x+\frac{4y}{3}=-4\right]$

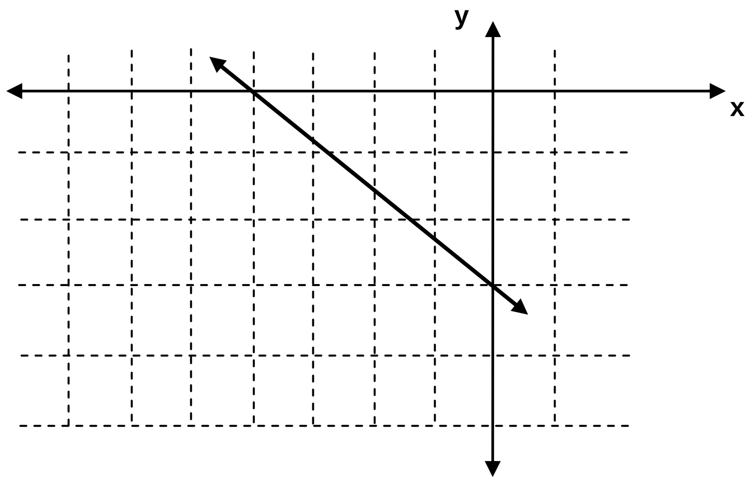
efectuando la operación, $3x+\frac{12y}{3}=-12$

simplificando, $3x+4y=-12$

igualando a cero, $3x+4y12=0$

que **es la ecuación general de la recta**.

La gráfica correspondiente es:



Realicemos ahora la transformación de la ecuación general de una recta, a la forma pendiente ordenada al origen, es decir, $y = mx + b$. Por ejemplo, sea la recta: $6x + 7y + 35 = 0$

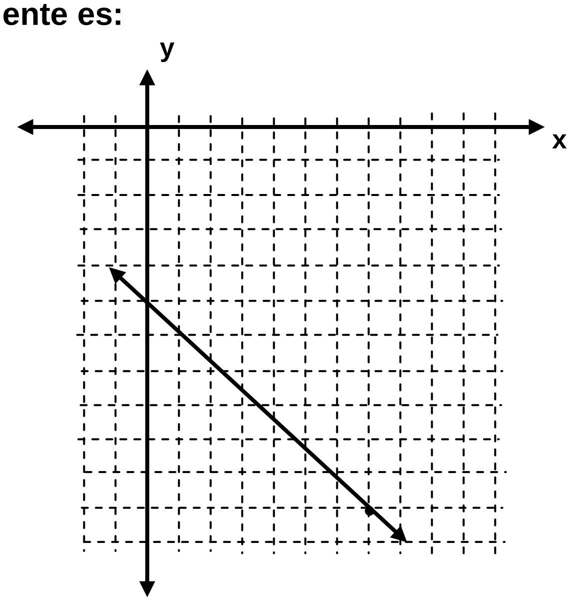
despejando y, $7y = -6x - 35$

$$y = \frac{-6x}{7} - \frac{35}{7}$$

$$y = \frac{-6x}{7} - 5$$

Donde la pendiente es $m = -\frac{6}{7}$ y la ordenada al origen es *b=-5*

La gráfica correspondiente es:



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1.- (   ) La ecuación de la recta $y + 4 = -3(x - 6)$ en su forma general se representa como:

a) $-3x + y + 14 = 0$

b) $3x + y - 14 = 0$

c) $3x - y + 22 = 0$

d) $3x + y - 22 = 0$

2.- (   ) La transformación de la recta $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ a su forma general se escribe como:

a) $7x + 4y - 28 = 0$

b) $4x + 7y + 28 = 0$

c) $4x + 7y - 28 = 0$

d) $7x + 4y + 28 = 0$

3.- (   ) La ecuación de la recta $2x - 5y = 10$ en su forma pendiente ordenada al origen es:

a) $y = \frac{2}{5}x - 2$

b) $y = \frac{5}{2}x + 2$

c) $y = \frac{2}{5}x + 2$

d) $y = \frac{5}{2}x - 2$

4.- (   ) La ecuación de la recta $y = \frac{4x}{5} - \frac{2}{5}$ en su forma general es:

a) $4x + 5y + 2 = 0$

b) $4x - 5y + 2 = 0$

c) $4x + 5y - 2 = 0$

d) $4x - 5y - 2 = 0$

5.- Sea la ecuación $-3x - 2y - 6 = 0$

I. Escribe la ecuación en su forma pendiente ordenada al origen.

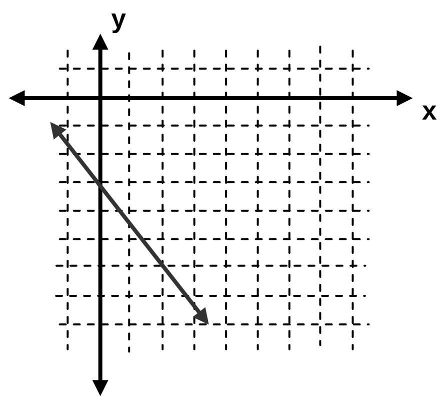
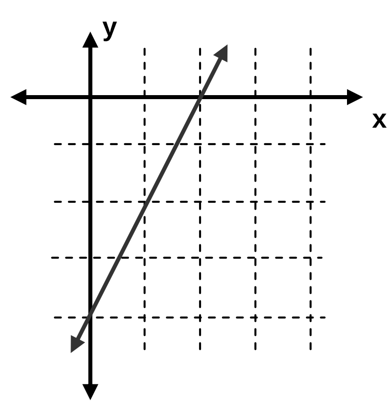
II. Traza la gráfica.

6.- Sea la ecuación $4x - 2y = 8$

I Escribe la ecuación en la forma simétrica.

II. Traza la gráfica empleando la intersección con los ejes.

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	b
2	c
3	a
4	D
5	I. $y=-\frac{3x}{2}-3$ II. 
6	I. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$ II. 

TEMA 2.4. FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

APRENDIZAJES
• Obtener la ecuación normal de la recta a partir de la forma general. • Determinar paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

Otra forma de expresar la ecuación de una recta es la forma normal, la cual se obtiene dividiendo la ecuación general **Ax + By = C** *entre* $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ *, en donde el signo del radical es igual al signo de* ***C****, entonces la ecuación normal se escribe como:*

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Revisemos el siguiente ejercicio.

Dada la recta *4x – 3y = 15* escribiremos la ecuación en su forma normal y trazaremos la gráfica.

Sustituyendo en la ecuación normal tenemos que:

$$\frac{4x}{\pm\sqrt{4^2+(-3)^2}}+\frac{-3y}{\pm\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{\pm\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$\frac{4x}{\pm\sqrt{16+9}}+\frac{-3y}{\pm\sqrt{16+9}}=\frac{15}{\pm\sqrt{16+9}}$$

$$\frac{4x}{\pm\sqrt{25}}+\frac{-3y}{\pm\sqrt{25}}=\frac{15}{\pm\sqrt{25}}$$

utilizando el signo positivo porque C es positivo, obtenemos

$$\frac{4x}{5}-\frac{3y}{5}=\frac{15}{5}$$

$$\frac{4x}{5}-\frac{3y}{5}=3$$

que **es la ecuación de la recta en su forma normal**.

*La gráfica de la recta la podemos construir despejando “**y**” de la ecuación general:*

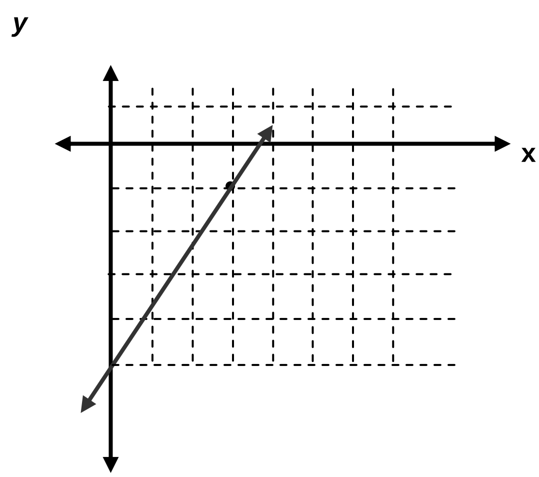
$$4x - 3y = 15$$

$$-3y = -4x + 15$$

$$y = \frac{-4x}{-3} + \frac{15}{-3}$$

$$y = \frac{4x}{3} - 5$$

Por lo que su gráfica es:



Analicemos ahora una ecuación de la recta en donde el valor de C es negativo.

Escribiremos la recta *6x + 7y= -21* en la forma normal y construiremos la gráfica.

Al sustituir en la ecuación normal tenemos:

$$\frac{6x}{\pm\sqrt{6^2+7^2}} + \frac{7y}{\pm\sqrt{6^2+7^2}} = \frac{-21}{\pm\sqrt{6^2+7^2}}$$

$$\frac{6x}{\pm\sqrt{36+49}} + \frac{7y}{\pm\sqrt{36+49}} = \frac{-21}{\pm\sqrt{36+49}}$$

$$\frac{6x}{\pm\sqrt{85}}+\frac{7y}{\pm\sqrt{85}}=\frac{-21}{\pm\sqrt{85}}$$

empleando el signo negativo de la raíz obtenemos la ecuación

$$\frac{-6x}{\sqrt{85}}-\frac{7y}{\sqrt{85}}=\frac{21}{\sqrt{85}}$$

Despejemos "**y**" de la ecuación general de la recta para construir la gráfica.

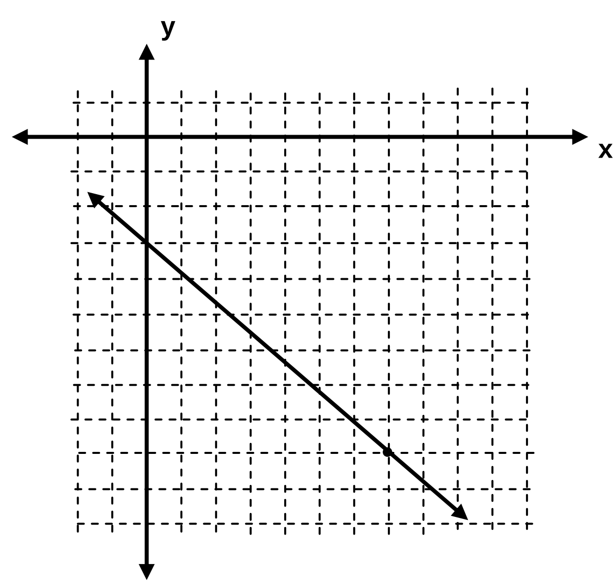
$$6x + 7y = -21$$

$$7y = -6x - 21$$

$$y=\frac{-6x}{7}-\frac{21}{7}$$

$$y=\frac{-6x}{7}-3$$

Por lo que la gráfica obtenida es:



A continuación veremos el caso en el que C = 0

Transformar la ecuación de la recta $-8x + 5y = 0$ a su forma normal

Si sustituimos en la ecuación normal obtenemos:

$$\frac{-8x}{\pm\sqrt{(-8)^2+5^2}}+\frac{5y}{\pm\sqrt{(-8)^2+5^2}}=\frac{0}{\pm\sqrt{(-8)^2+5^2}}$$

$$\frac{-8x}{\pm\sqrt{64+25}}+\frac{5y}{\pm\sqrt{64+25}}=0$$

$$\frac{-8x}{\pm\sqrt{89}}+\frac{5y}{\pm\sqrt{89}}=0$$

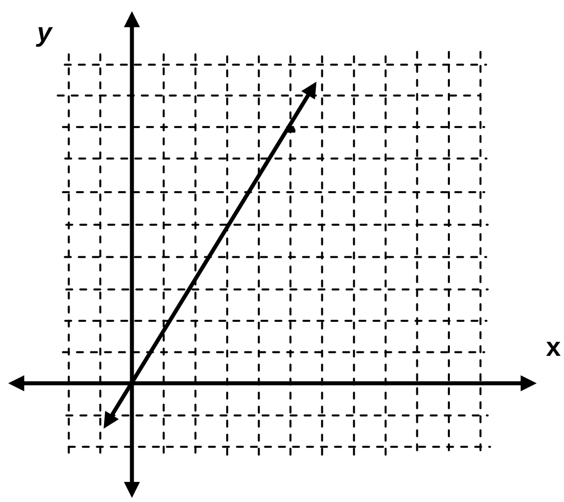
Construyamos la gráfica empleando el mismo método que en las ecuaciones anteriores.

$$-8x + 5y = 0$$

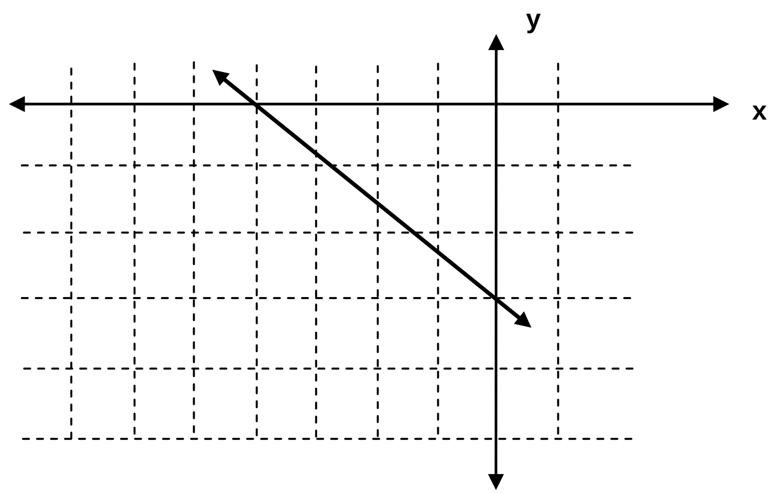
$$5y = 8x$$

$$y=\frac{8x}{5}$$

por lo que su gráfica es:



También es posible obtener la ecuación de la recta normal si tenemos la gráfica de una recta, por ejemplo, analicemos la gráfica siguiente.



Empleando los cortes con los ejes, su ecuación pendiente ordenada al origen se escribe como:

$$y = \frac{-3x}{4} - 3$$

multiplicando por 4 ambos lados de la ecuación

4y = -3x – 12

escribiendo la ecuación en su forma general

3x + 4y = - 12

transformándola a la ecuación normal

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{4y}{\pm\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{-12}{\pm\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{9+16}} + \frac{4y}{\pm\sqrt{9+16}} = \frac{-12}{\pm\sqrt{9+16}}$$

utilizando el signo negativo

$$\frac{3x}{-\sqrt{25}} + \frac{4y}{-\sqrt{25}} = \frac{-12}{-\sqrt{25}}$$

$$\frac{3x}{-5} + \frac{4y}{-5} = \frac{12}{5}$$

El **paralelismo** entre rectas se refiere a que cuando en un sistema de ejes cartesiano tenemos dos o más rectas existen dos posibilidades, las rectas se intersectan, o no tienen ningún punto en común, en este tema analizaremos los casos en que dos rectas no tienen puntos en común, es decir son paralelas y cuando dos rectas se intersectan formando ángulos de 90º.

Si se tienen dos rectas paralelas significa que sus pendientes son iguales, lo que se escribe como:

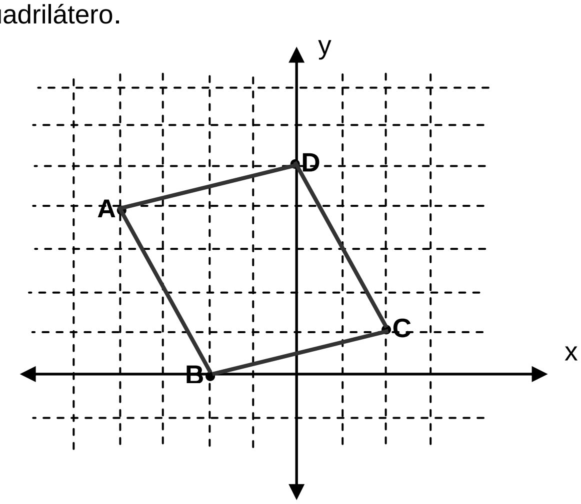
Recta 1 paralela a recta 2 si y solo si sus pendientes son iguales, es decir. $m_1 = m_2$

En el caso en que dos rectas sean perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a –1

Recta 1 perpendicular a recta 2 si y solo si $m_1 m_2 = -1$

Revisemos el siguiente ejercicio: Sean los puntos A(-4, 4), B(-2, 0), C(2, 1) y D(0, 5) los vértices de un cuadrilátero, probar que es un paralelogramo.

Primero graficaremos el cuadrilátero.



Empleando la ecuación de la recta punto pendiente primero obtengamos las ecuaciones de las rectas que representan los lados y expresémoslas en la forma pendiente ordenada al origen.

Recta $\overline{AB}$ tomando como referencia que pasa por el punto **B**	Recta $\overline{CD}$ tomando como referencia que pasa por el punto **D**
$y - 0 = \frac{-4}{2}(x - (-2))$ *y = -2(x + 2)* *y = -2x – 4*	$y - 5 = \frac{-4}{2}(x - 0)$ *y - 5 = -2(x)* *y = -2x+ 5*

Como las rectas tienen la misma pendiente, es decir *m = - 2* significa que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$

Recta $\overline{AD}$ tomando como referencia que pasa por el punto **D**	Recta $\overline{BC}$ tomando como referencia que pasa por el punto **B**
$y-5=\frac{1}{4}(x-0)$ $y=\frac{1}{4}x+5$	$y-0=\frac{1}{4}(x-(-2))$ $y=\frac{1}{4}(x+2)$ $y=\frac{1x}{4}+\frac{2}{4}$ $y=\frac{1x}{4}+\frac{1}{2}$

Comparando nuevamente las pendientes vemos que son iguales, $m=\frac{1}{4}$ por lo que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ también son paralelos, por lo tanto el cuadrilátero es un paralelogramo.

Veamos otro problema.

Obtener la ecuación de la recta en su forma general, si pasa por el punto P(3, – 2) y es paralela a la recta *3x – y – 4 = 0*

Expresemos primero la ecuación general en la forma pendiente ordenada al origen

$$3x - y - 4 = 0$$

despejando y tenemos: $-y = -3x + 4$

$y = 3x - 4$ cuya pendiente es m = 3

Como la recta es paralela a la que pasa por P(3, -2) entonces las pendientes son iguales.

Empleando la pendiente y el punto $y - y_1 = (x - x_1)$ escribimos la ecuación de la recta punto pendiente como:

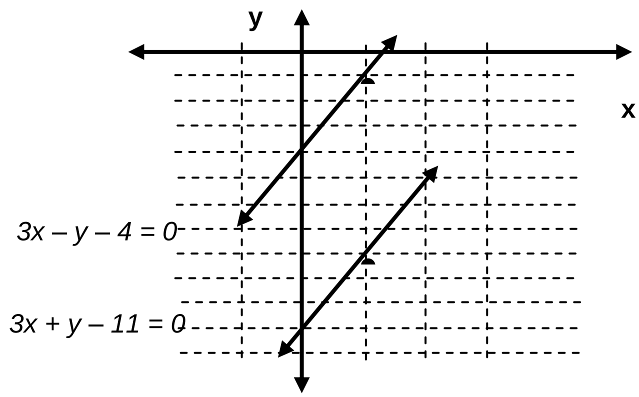
$$y - (-2) = 3(x - 3)$$

$$y + 2 = 3x - 9$$

$$-3x + y + 2 + 9 = 0$$

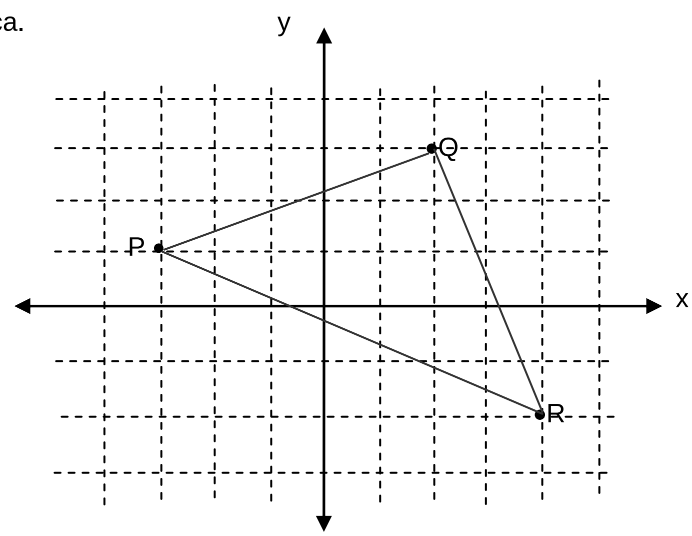
$-3x + y + 11 = 0$ *que es la ecuación solicitada.*

Las gráficas son:



Empleando la condición de perpendicularidad, probemos ahora que el triángulo cuyos vértices tienen por coordenadas P(-3,1), Q(2,3) y R(4,-2) corresponde a un triángulo rectángulo, empleando la condición de perpendicularidad.

Iniciemos trazando la gráfica.



Es claro que el ángulo formado por los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ parece ser de 90º por lo que debemos obtener las ecuaciones de las rectas determinadas por esos segmentos y comparar sus pendientes si el producto de las mismas es –1 el triángulo es rectángulo. Empleemos nuevamente la forma de la ecuación de la recta punto-pendiente y obtengamos las ecuaciones que representan esos lados del triángulo.

Ecuación de la recta $\overline{PQ}$ tomando como referencia que pasa por el punto **P**	Ecuación de la recta $\overline{QR}$ tomando como referencia que pasa por el punto **Q**
$y-1=\frac{2}{5}(x-(-3))$	$y-3=\frac{-5}{2}(x-2)$
$y-1=\frac{2}{5}(x+3)$	$y-3=\frac{-5}{2}x+\frac{10}{2}$
$y-1=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$	$y-3=\frac{-5}{2}x+5$
$y=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}+1$	$y=\frac{-5}{2}x+5+3$
$y=\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$	$y=\frac{-5}{2}x+8$
por lo que $m_1=\frac{2}{5}$	por lo tanto $m_2=\frac{-5}{2}$

Multiplicando las pendientes $m_1(m_2)=\frac{2}{5}\left(\frac{-5}{2}\right)=$

$\frac{-10}{10}$ = *-1 por lo que el triángulo es rectángulo*

Analicemos este otro problema

Determinar la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(-5, -2) y es perpendicular a la recta.

$$y=\frac{7}{-2}x-3$$

La pendiente de la recta dada es

$$m_1=\frac{7}{-2}$$

aplicando la condición de perpendicularidad

$$m_1 m_2 = -1$$

$$\left(\frac{7}{-2}\right)m_2 = -1$$

multiplicando por - 2 la igualdad $7m_2 = -2(-1)$

$$7m_2 = 2$$

dividiendo por ***7*** $m_2 = \frac{2}{7}$

Con la pendiente obtenida y el punto P obtengamos la ecuación de la recta perpendicular.

$$y-(-2) = \frac{2}{7}(x-(-5))$$

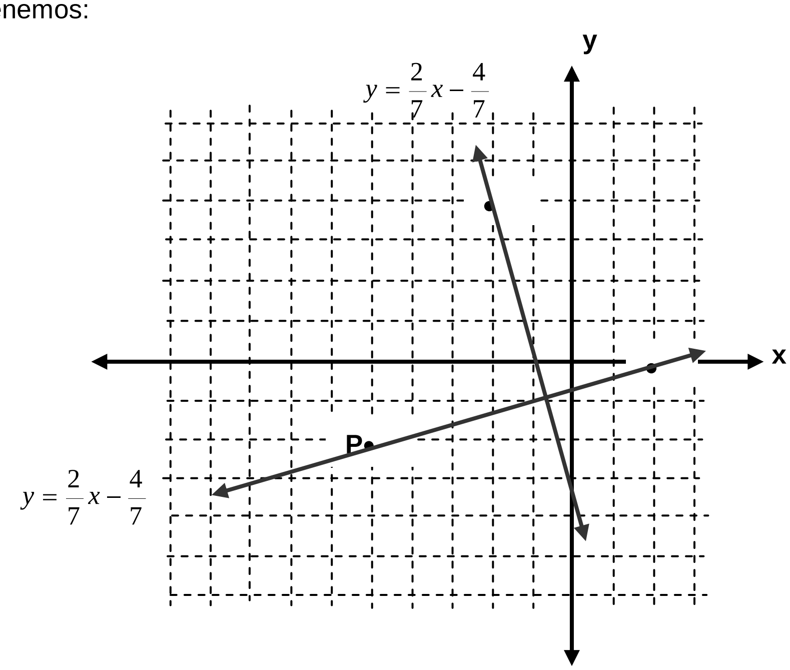
$$y+2 = \frac{2}{7}(x+5)$$

simplificando *7y + 14 = 2x + 10*

obtenemos -2x + 7y + 14 - 10 = 0

por lo que -2x + 7y + 4 = 0, que es la ecuación solicitada

Al graficar las rectas tenemos:



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1.- (   ) La ecuación normal de la recta *8x -15y + 51 = 0* es:

a) $\frac{-8x}{17} - \frac{15y}{17} = 3$

b) $\frac{8x}{17} + \frac{15y}{17} = 3$

c) $\frac{-8x}{17} + \frac{15y}{17} = 3$

d) $\frac{8x}{17} - \frac{15y}{17} = 3$

2.- (   ) Sea *6x* + *8y* = - *48* la ecuación general de una recta, la forma normal es:

a) $\frac{6x}{-10} + \frac{8y}{10} = 4.8$

b) $\frac{6x}{-10} + \frac{8y}{-10} = 4.8$

c) $\frac{6x}{10} + \frac{8y}{10} = 4.8$

d) $\frac{6x}{10} + \frac{8y}{-10} = 4.8$

3.- (   ) La recta $y = \frac{-7x}{3} + 6$ en su forma normal es:

a) $\frac{7x}{-\sqrt{58}} + \frac{3y}{-\sqrt{58}} = \frac{18}{-\sqrt{58}}$

b) $\frac{7x}{-\sqrt{58}} + \frac{3y}{\sqrt{58}} = \frac{18}{-\sqrt{58}}$

c) $\frac{7x}{-\sqrt{58}} + \frac{3y}{-\sqrt{58}} = \frac{18}{\sqrt{58}}$

d) $\frac{7x}{\sqrt{58}} + \frac{3y}{\sqrt{58}} = \frac{18}{\sqrt{58}}$

4.- (   ) La ecuación de la recta *2x – y = 0* en la forma normal se representa como:

a) $\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{-\sqrt{3}} = 0$

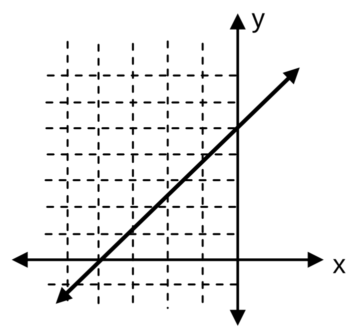
b) $\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{-\sqrt{5}} = 0$

c) $\frac{2x}{-\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

d) $\frac{2x}{-\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 0$

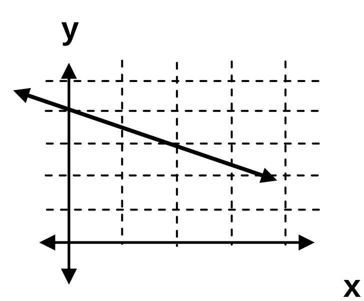
Analiza las gráficas y escribe la ecuación normal de la recta en el espacio correspondiente.

5.- Analiza la siguiente gráfica y escribe la ecuación de la recta normal considerando las intersecciones con los ejes.



____

6.- Analiza la siguiente gráfica y escribe la ecuación pendiente ordenada al origen utilizando el valor de la ordenada al origen y el punto por donde pasa la recta.



____

7.- (   ) Las ecuaciones que representan rectas paralelas son:

a) $2x + y = 4$
   $4x + y = 8$

b) $-3x + 4y = -1$
   $4x + 3y = -1$

c) $3x - 5y = 22$
   $6x - 10y = -22$

d) $x + y = 5$
   $x - y = 5$

8.- (   ) Las ecuaciones que representan rectas paralelas son:

a) $m_1 = -m_2$

b) $-m_1 = m_2$

c) $m_1 m_2 = -1$

d) $m_1 = m_2$

9.- (   ) Las ecuaciones que representan rectas perpendiculares son:

a) $4x + 2y = -9$
   $4x + 2y = 12$

b) $-3y + 7x = 6$
   $-3x - 7x = 6$

c) $5x - 2y = 14$
   $2x + 5y = -10$

d) $x + y = 4$
   $2x + 2y = 8$

10.- ( ) La condición para que dos rectas sean perpendiculares se representa como:

a) $m_1 = -m_2$

c) $m_1 m_2 = 1$

c) $m_1 = m_2$

d) $m_1 m_2 = -1$

11.- Sea la ecuación de la recta $-5x + 2y + 8 = 0.$

I. Obtén la ecuación general de la recta paralela a la recta de la ecuación anterior y que pasa por el punto P(-3,1).

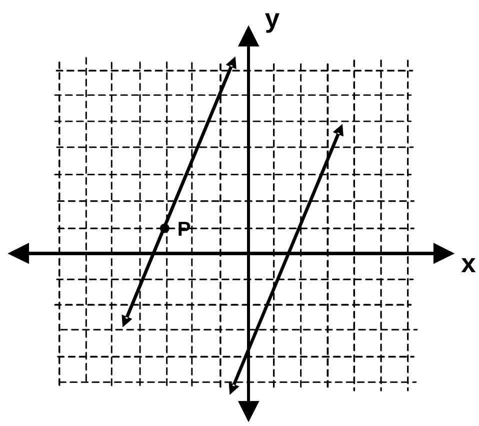
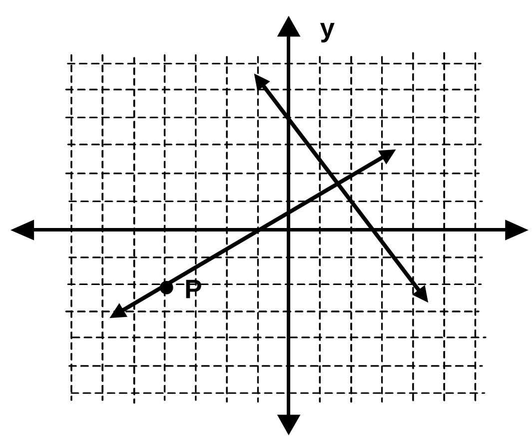
II. Traza la gráfica correspondiente.

12.- Sea la ecuación de la recta $y = \frac{-3x}{2} + 4$

I. Escribe la ecuación que pasa por el punto P(- 4, - 2) y es perpendicular a la recta de la ecuación anterior.

II. Traza la gráfica correspondiente.

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	c
2	b
3	d
4	b
5	$\frac{5x}{-\sqrt{41}}+\frac{4y}{\sqrt{41}}=\frac{20}{\sqrt{41}}$
6	$\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$
7	c
8	d
9	c
10	d
11	. *5x – 2y - 13 = 0* II: 
12	I. *2x – 3y - 8 = 0* II.  X

TEMA 2.5 DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

APRENDIZAJES
• Calcular la distancia de un punto a una recta.

La distancia de un punto **P(x_1,y_1)** a una recta ***Ax + By + C = 0*** es la medida del segmento perpendicular que va del punto a la recta, esta medida se calcula con la ecuación:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

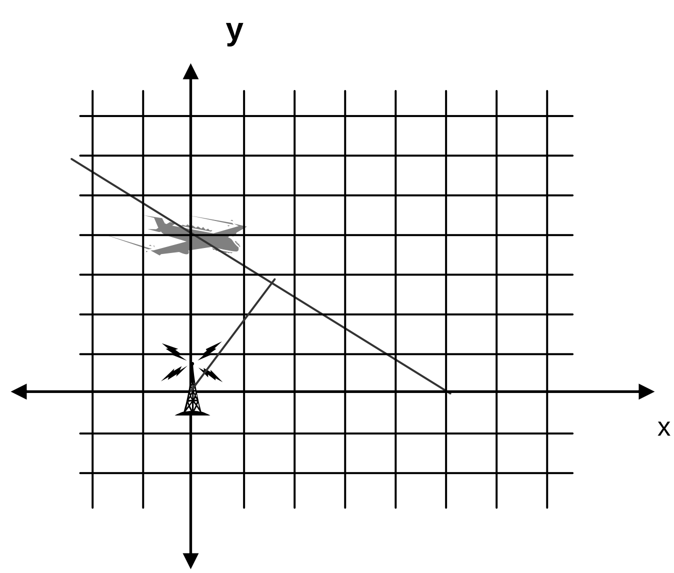
Ya que no existen distancias negativas el signo de la raíz se elige de manera que el resultado de la división sea siempre positivo.

Es importante destacar que para aplicar la ecuación de la distancia de un punto a una recta, la ecuación de la recta debe de estar igualada a cero.

Por ejemplo, consideremos la situación en la que una torre de radar registra la manera en que un avión desciende hacia una pista de aterrizaje (ver figura).

Nota: cada marca equivale a cien metros.

7



Obteniendo la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen tenemos:

$$y = \frac{-4}{5}x + 4$$

que al escribirla en la forma general nos queda:

4x + 5y – 20 = 0

Apliquemos la ecuación de la distancia de un punto a una recta para determinar la distancia más cercana que existe del radar al avión, sustituyendo las coordenadas del punto P(0,0) y los valores A = 4, B = 5 y C = - 20

$$d = \frac{4(0) + 5(0) - 20}{\pm\sqrt{4^2 + 5^2}}$$

simplificamos $d = \dfrac{-20}{\pm\sqrt{16+25}}$

$$d = \frac{-20}{\pm\sqrt{41}}$$

calculamos la raíz con una aproximación de tres dígitos

$$d = \frac{-20}{\pm 6.403}$$

se debe emplear el signo menos del denominador para que el cociente sea positivo, por lo que la distancia es: d = 3.124, que en metros equivale a 312.4 metros

Calculemos ahora la distancia que hay del punto P(- 7, 6) a la recta *3x - 4y + 12 = 0*, sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$d = \frac{3(-7) - 4(6) + 12}{\pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

simplificando $d = \dfrac{-21 - 24 + 12}{\pm\sqrt{9+16}}$

$$d = \frac{-33}{\pm\sqrt{25}}$$

utilizando el signo negativo de la raíz $d = \dfrac{-33}{-5}$

por lo tanto *d* = 6.6

Construyamos la gráfica de la recta para lo cual la transformamos en la forma pendiente ordenada al origen y ubiquemos el punto P

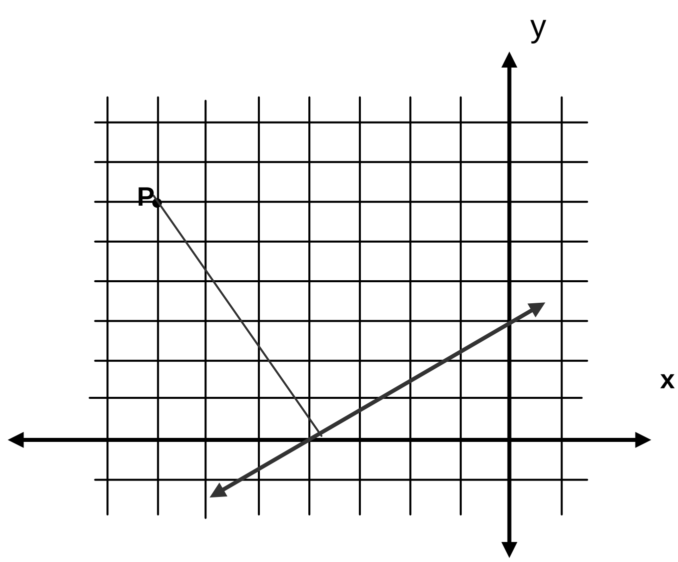
$$3x - 4y + 12 = 0$$

despejando y, ***-4y = -3x – 12***

$$y = \frac{-3x}{-4} - \frac{12}{-4}$$

$$y = \frac{3x}{4} + 3$$

por lo que la grafica nos queda de la siguiente manera:



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1.- (   ) La distancia del origen a la recta $y = -x + 1$ es:

a) -0.707
c) -1.414
c) 1.414
d) 0.707

2.- (   ) Sea $5x + 3y - 9 = 0$ la ecuación general de una recta, su distancia al punto **P(- 3, 1)** es:

a) 3.601
b) -3.601
c) 0.278
d) -0.2278

3.- (   ) La distancia del punto **P(3, - 4)** a la recta $x - y = 0$ mide

a) 4.95
b) –4.95
c) 0.202
d) -0.202

4.- (   ) Sea la ecuación de la recta $y = \frac{3x}{4} - \frac{5}{4}$, su distancia al punto **P(- 2, 4)** mide:

b) -0.294
c) 0.294
c) 3.4
d) -3.4

5.- Sea $-5x - 4y + 14 = 0$ la ecuación general de una recta.

I. Construye la gráfica correspondiente

II. calcula la distancia que hay al punto P(- 2,1)

6.- Analiza la gráfica y calcula la distancia que hay del punto **P** a la recta.

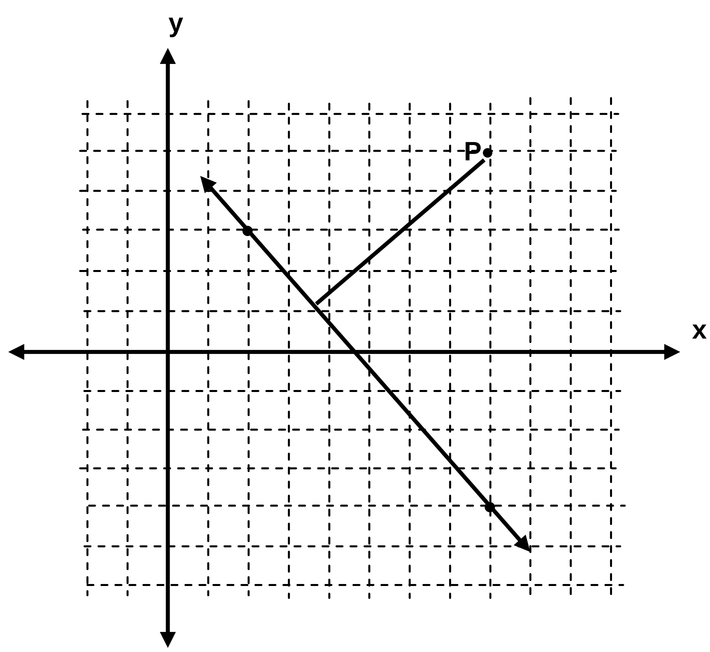
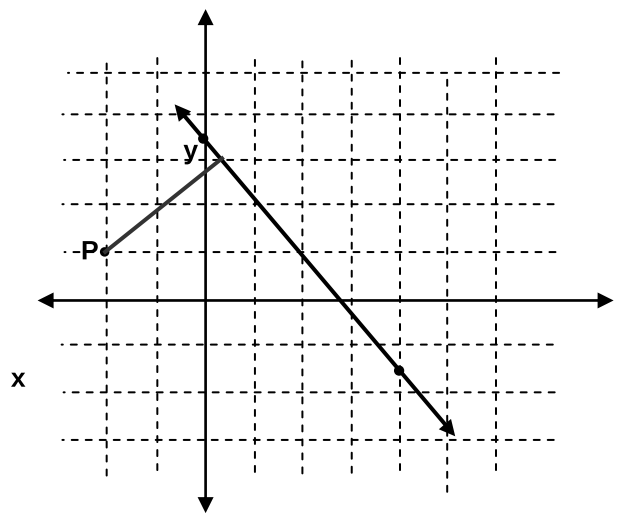


TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	d
2	a
3	a
4	c
5	I  II d = 3.124
6	d = 5y.857

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

A continuación se te presentan una serie de ejercicios con la finalidad de que reafirmes tus conocimientos, utiliza hojas para realizar los procedimientos que requieras.

Para resolver estos ejercicios cuentas con 60 minutos

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se solicita, anotando el desarrollo y la solución.

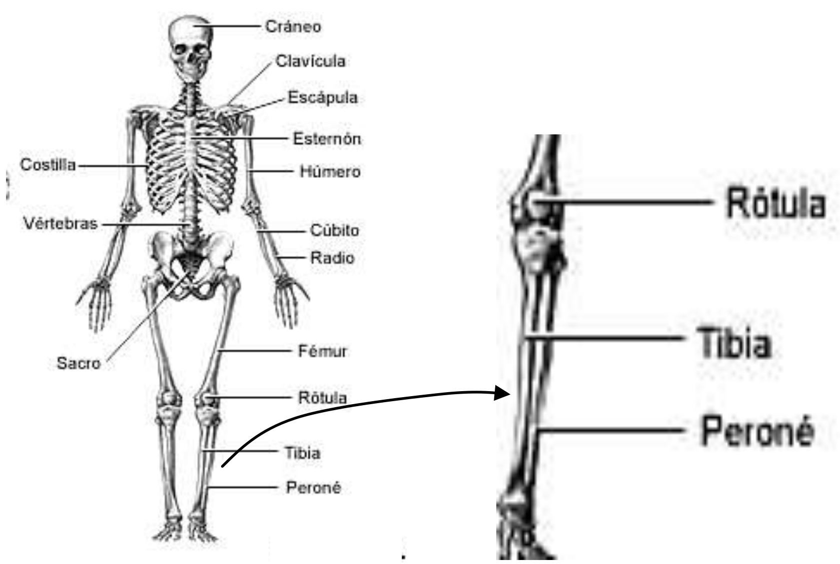
1. Existen 930 especies del mundo animal que son consideradas en peligro de extinción, dentro de estas se encuentra el ***manatte*** (mamífero acuático), al cuantificar el número de **manattes** muertos en 1998 hallaron 172 y en el 2003 se encontraron 237. Si consideramos que el número de muertes de **manatees** para cada 5 años es constante.

   a) Determina la ecuación de la recta pendiente ordenada al origen que representa esta situación
   b) Calcula la cantidad de **manatees** muertos para el año 2015.

2. La cisterna de agua de un edificio contiene 22000 litros y el consumo diario en promedio es de 2000 litros.

   a) Traza la gráfica que describe la cantidad de agua existente en la cisterna para 1, 2, 3, 4, ... , 10 días.
   b) Determina la ecuación de la recta punto pendiente empleando el punto ***P*** para 10 días.

3. De manera general los hombres que miden 170 cm de estatura tienen un hueso conocido como “tibia” que aproximadamente mide 37.8 cm y los que miden 188 cm de altura tienen una “tibia” que aproximadamente mide 44.1 cm.



considerando que existe una relación lineal entre estatura y tamaño del hueso de la “tibia”

a) Obtén la ecuación general de la recta que describe esta situación
b) Calcula la medida del hueso de la "tibia" de un varón cuya altura es 180 cm, empleando la ecuación de la recta que obtuviste.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que corresponde a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

4. (   ) La ecuación de la recta punto pendiente si ***m = -1/3*** y pasa por el punto ***P(- 4,-3)*** es:

a) $y+3=\frac{-1}{3}(x-4)$

b) $y-3=\frac{-1}{3}(x-4)$

c) $y-3=\frac{-1}{3}(x+4)$

d) $y+3=\frac{-1}{3}(x+4)$

5. (   ) La ecuación de la recta pendiente ordenada al origen cuya pendiente es ***m = 3*** y la ordenada al origen ***b = - 4***, se escribe como:

a) $y = 3x - 4$

b) y = - 3x – 4

c) $y = 3x + 4$

d) $y = -3x + 4$

6. (   ) La ecuación de la recta $\mathbf{y=\frac{-x}{5}+7}$ en su forma general se escribe como:

a) $x + 5y - 35 = 0$

b) $x - 5y - 35 = 0$

c) $x + 5y - 7 = 0$

d) $x + 5y + 7 = 0$

7. (   ) La recta ***-7x + 3y + 21 = 0*** en la forma simétrica es:

a) $\frac{x}{7}+\frac{y}{-3}=1$

b) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-7}=1$

c) $\frac{x}{-7}+\frac{y}{-3}=1$

d) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{7}=1$

8. (   ) La ecuación $y=\frac{-5x}{7}+6$ en la forma normal se representa como:

a) $\frac{5x}{-\sqrt{74}}+\frac{7y}{-\sqrt{74}}=\frac{42}{-\sqrt{74}}$

b) $\frac{5x}{\sqrt{74}}+\frac{7y}{\sqrt{74}}=\frac{42}{\sqrt{74}}$

c) $\frac{5x}{-\sqrt{74}}+\frac{7y}{-\sqrt{74}}=\frac{6}{-\sqrt{74}}$

d) $\frac{5x}{\sqrt{74}}+\frac{7y}{\sqrt{74}}=\frac{6}{\sqrt{74}}$

9. (   ) La pareja de rectas perpendiculares es:

a) $5x + 3y = 15$
$-5x - 3y = -15$

b) $6x - 8y = 24$
$8x - 6y = 24$

c) $-x + y = 7$
$x + y = 10$

d) $2x - 6y = 24$
$4x - 12y = 48$

10. (   ) Las rectas paralelas son:

a) $-8x - 7y = 1$
$-8x + 7y = 12$

b) $2x - 4y = 0$
$-2x - 4y = -6$

c) $4x + 3y = 20$
$3x - 4y = 12$

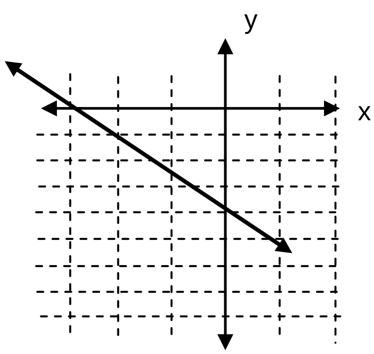
d) $5x + 7y = 11$
$10x + 14y = 30$

11. (   ) La distancia que hay del origen a la recta *$12x + 5y + 169 = 0$* es:

a) 13
b) 144
c) 25
d) 169

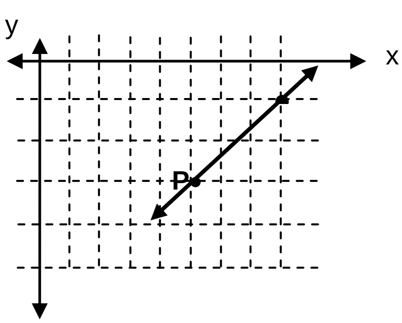
INSTRUCCIONES: Analiza cada gráfica y escribe sobre la línea la ecuación de la recta que se te solicita.

12. Recta pendiente ordenada al origen



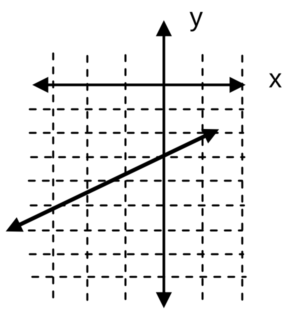
____

13. Recta punto pendiente



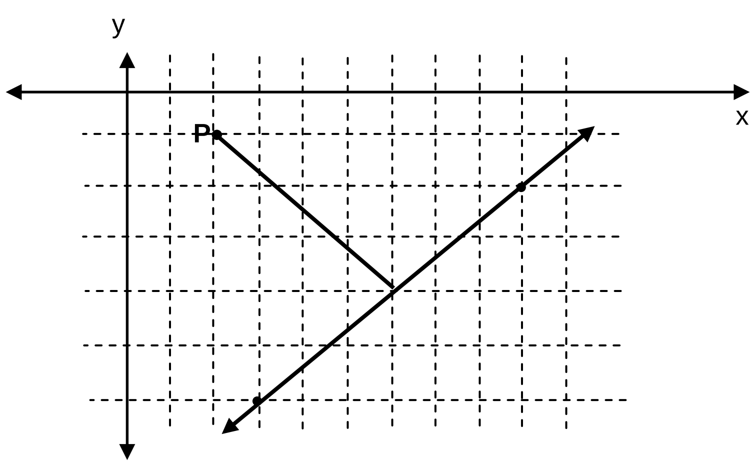
____

14. Ecuación general



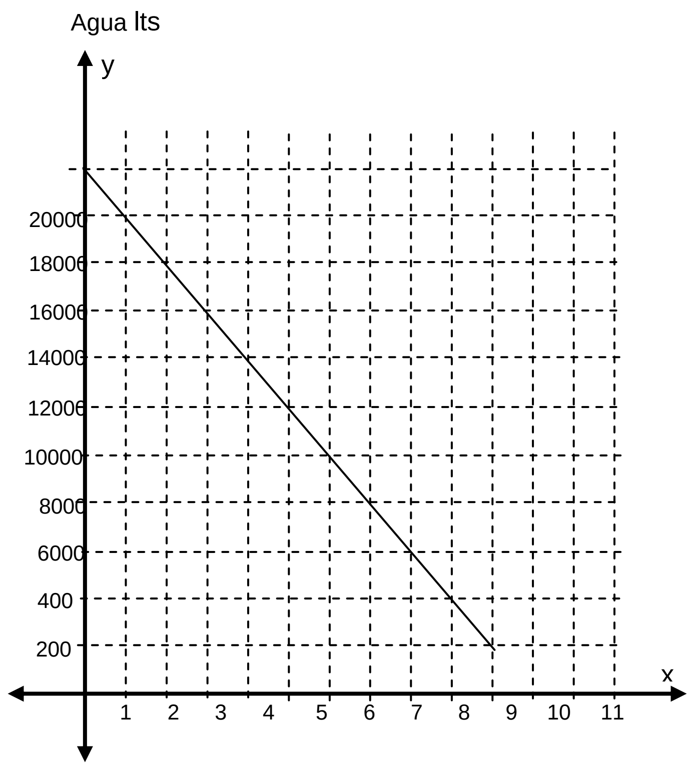
____

15. Analiza la gráfica y calcula la distancia que hay del punto a la recta.



____

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	a) y = 13x – 25802 b) 393
2	a)  b) *y – 2000 = -2000(x – 10)*
3	a) *0.35x – y - 21.7 = 0* b) tibia = 41.3 cm
4	d
5	a
6	a
7	b
8	b
9	c
10	d
11	a
12	$y = \frac{-3}{2}x - 4$
13	$y + 3 = \frac{2}{3}(x - 5)$
14	*2x – 3y - 9 = 0* *ó* *-2x + 3y + 9 = 0*
15	Distancia = 4.72 u

Unidad III
La Circunferencia

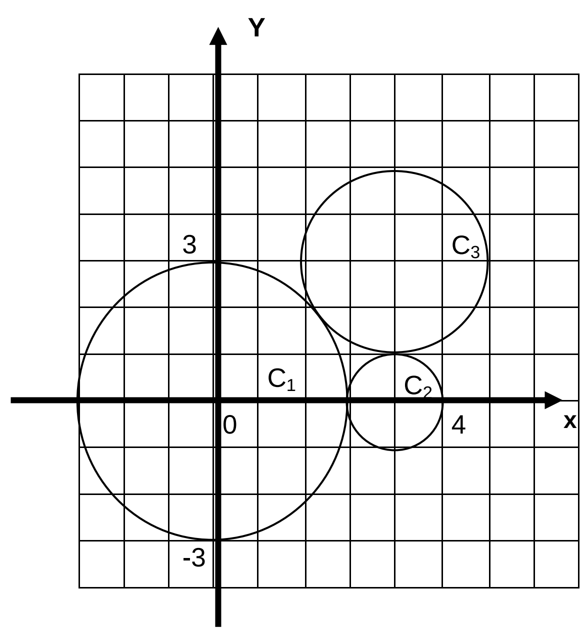
TEMA 3.1 CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

APRENDIZAJES
• Resolver problemas de trazo geométrico y aplicación práctica que requieran cálculo de áreas de regiones circulares o de elementos particulares asociados con una circunferencia.

Desde épocas remotas el hombre ha construido gran parte de sus inventos a partir de la circunferencia como figura básica, por ejemplo la rueda. De igual manera la circunferencia tiene su uso en la arquitectura, jardinería, ingeniería, danza, pintura, astronomía, navegación, cinemática entre muchos otros campos.

La circunferencia como lugar geométrico es una curva formada por puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, por lo que sus elementos principales son: **el centro y el radio**. Analicemos los siguientes ejemplos.

A la entrada de un supermercado se encuentra un dispositivo de detención como se muestra en la siguiente figura, obtén los elementos de cada uno de los discos.



Para obtener las coordenadas de los elementos de cada uno de los discos, nos referiremos al sistema de ejes coordenados.

Para el disco mayor su centro C_1 tiene como coordenadas (0, 0) y su radio es de 3 unidades.
Para el disco mediano su centro C_3 tiene como coordenadas (4, 3) y su radio es de 2 unidades.
Para el disco menor su centro C_2 tiene como coordenadas (4, 0) y su radio es de 1 unidades.

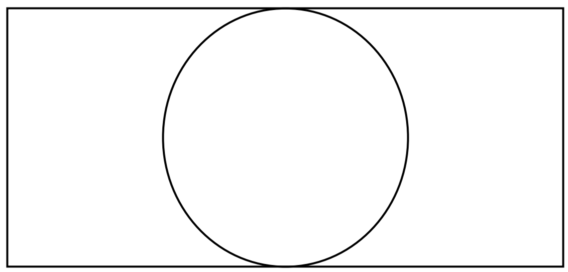
Analicemos algunos otros ejemplos de aplicación:

En medio de un patio rectangular de 8m por 10m se coloca una sombrilla circular de 2.5m de radio.

a) Realiza un esquema y da las coordenadas del centro.

b) Calcula el área que se cubrirá con la sombrilla.

Al realizar el esquema se tiene:



Para calcular el centro de la sombrilla, debemos calcular las coordenadas del punto medio, entonces:

$$Pm = \left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+10}{2} \right)$$

$P_m = (4, 5)$, que por ser las coordenadas del centro:

$C(4, 5)$ y el radio $r = 2.5$

Entonces se trata de una circunferencia con centro fuera del origen.

b) Para calcular el área, emplearemos la fórmula $A = \pi r^2$

$$A = 3.1416(2.5m)^2$$

$$A = 3.1416(6.25m^2)$$

$$\text{Por lo tanto: } A = 19.63\ m^2$$

Realicemos otro ejemplo:

¿Cuál es el lugar geométrico descrito por la trayectoria de un avión que se mantiene sobrevolando en la ciudad de Toluca a una distancia constante de 6 km de la torre del aeropuerto, esperando instrucciones para su aterrizaje?

¿Cuántos kilómetros recorre durante una vuelta de espera?

Como está sobrevolando a una distancia constante, ésta corresponde al radio de una circunferencia cuyo centro es la torre del aeropuerto.

Para calcular los kilómetros que recorre en una vuelta de espera, debemos considerar la longitud de la circunferencia, esto es su perímetro por lo que:

$$P = 2\pi r$$

$$P = 2(3.1416)(6\ km)$$

$$P = 37.7\ km$$

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES. Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complementan correctamente.

1.- A la distancia entre el centro y un punto extremo de la circunferencia se le denomina________

2.- La ecuación para calcular el área de una circunferencia es____________________________.

3.- La relación del diámetro respecto al radio es_______________________________________.

INSTRUCCIONES. Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

4.- (   ) Mediante un sistema de navegación por radio, una embarcación turística se mueve de una isla a la costa, conservando perpendiculares sus distancias a dos faros situados en los puntos de coordenadas (0, - 10) y (0, 10). ¿Cuál es la longitud de dicha trayectoria?

a) – 15.71

b) 15.75

c) – 25.13

d) 25.13

5.- (   ) En una plaza pública de 30m de radio se ha decidido asfaltar un circulo de 7m de radio en donde se colocara una estatua. ¿Cuál es el área que ha quedado sin asfaltar?

a) $\pi(30 - 7)^2$

b) $\pi(30^2 - 7^2)$

c) $\pi(30^2 + 7^2)$

d) $\pi(30 + 7)^2$

TABLA DE COMPROBACIÓN

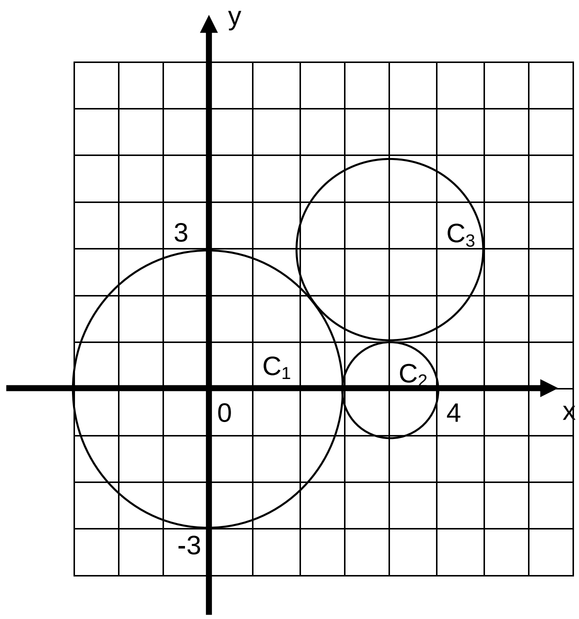
Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**radio**
2	$A = \pi r^2$
3	$d = 2r$
4	**d**
5	**b**

TEMA 3.2 ECUACIONES ORDINARIAS DE LA CIRCUNFERENCIA

APRENDIZAJES
• Resolver problemas que involucren circunferencias con centro en el origen. • Resolver problemas que involucren circunferencias con centro fuera del origen.

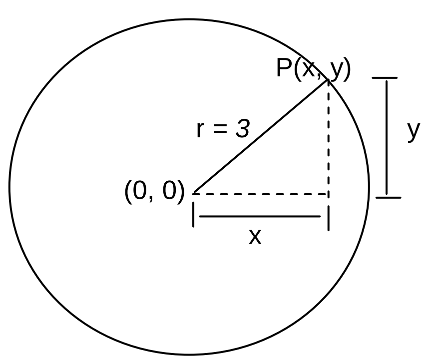
Como todo lugar geométrico la circunferencia queda representada por una expresión algebraica, analicemos el siguiente ejemplo.

A la entrada de un supermercado se encuentra un dispositivo de detención como se muestra en la siguiente figura.



A continuación obtendremos la ecuación de cada uno de los discos.

Al considerar la circunferencia que tiene su centro en el origen del sistema de ejes coordenados se tiene como datos C (0,0) radio *r = 3u,* al obtener las proyecciones del radio con respecto a cada uno de los ejes se forma un triángulo rectángulo en el cual es aplicable el teorema de Pitágoras.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h = r = 3$$

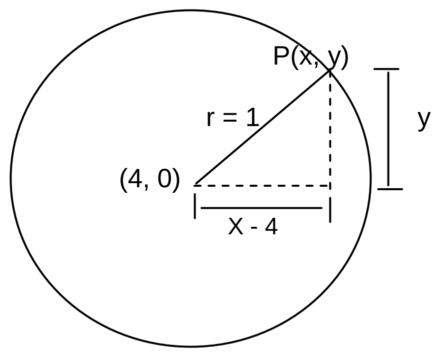
$$(3)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{que es la forma canónica}$$

$$9 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

esta última es la ecuación de la circunferencia en su forma general.

Analizando de forma análoga la Circunferencia de Centro C_2 se tiene que las coordenadas de su centro C(4, 0) y su radio $r = 1u$; entonces:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$(1)^2 = (x - 4)^2 + (y)^2 \quad \text{que es la forma canónica}$$

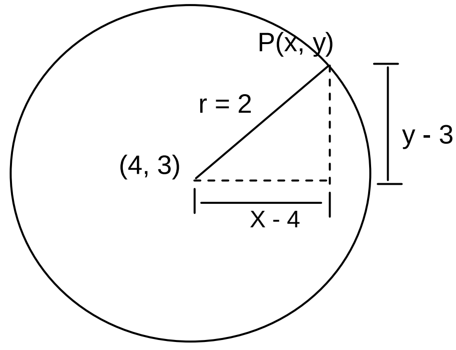
$$1 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 16 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$$

esta última es la ecuación de la circunferencia en su forma general

Analizando de forma análoga la Circunferencia de Centro C_3 se tiene que las coordenadas de su centro C(4, 3) y su radio $r = 2\ u$; entonces:



Aplicando el teorema de Pitágoras

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$(2)^2 = (x – 4)^2 + (y – 3)^2 \text{ que es la forma canónica}$$

$$4 = x^2 – 8x + 16 + y^2 – 6y + 9$$

$$x^2 – 8x + 16 + y^2 – 6y + 9 – 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x – 6y + 21 = 0$$

Realizando un resumen de la información tenemos:

Centro	Radio	Ecuación ordinaria
(0, 0)	3	$x^2 + y^2 = 3^2$
(4, 0)	1	$(x – 4)^2 + y^2 = 1^2$
(4, 3)	2	$(x – 4)^2 + (y – 3)^2 = 2^2$
(h, k)	r	$(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$

Al desarrollar el binomio de esta última ecuación se tiene:

$$(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$$

$$x^2 – 2xh + h^2 +y^2 – 2yk + k^2 = r^2$$

$$x^2 – 2xh + h^2 +y^2 – 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

entonces si denominamos a : $- 2h = D$

$$- 2k = E$$

$$h^2 + k^2 – r^2 = F$$

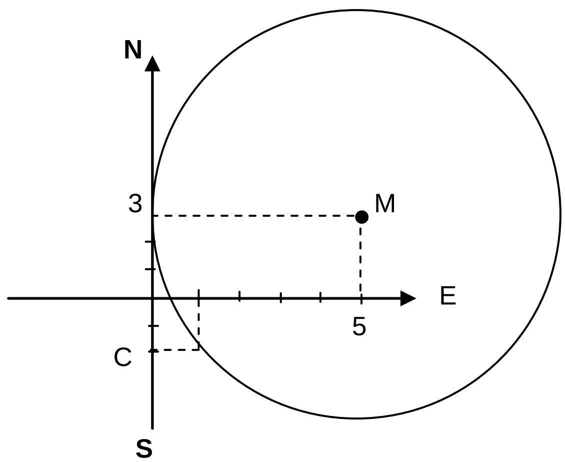
se tiene: $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

que denominamos ecuación general de la circunferencia.

Analicemos el siguiente problema:

Un campesino tiene un manantial dentro de sus tierras. Éste se encuentra 5 km hacia el este y 3 km hacia el norte del cruce de dos caminos perpendiculares. Desea construir una cerca circular cuyo centro sea el manantial y que la distancia máxima sea hasta la casa, la cual se ubica 1km hacia el este y 2 km hacia el sur de dicho cruce. Obtén la ecuación que representa a la cerca circular.

Para resolver este problema primero realizaremos una representación gráfica.



Observa que el centro de la circunferencia tiene como coordenadas (5, 3), para realizar el cálculo del radio, procederemos a obtener la distancia entre el manantial y la casa;
M (5, 3) y C (1, -2) por lo que:

$$CM = \sqrt{(1-5)^2 + (-2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{(41)} = 640$$

Por lo que se trata de una circunferencia C(5, 3) y radio $r = \sqrt{41}$; entonces:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 41$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 - 41 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y - 7 = 0$$

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES. Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complementan correctamente.

1.- La ecuación de una circunferencia en su forma general es:______________________________

2.- La ecuación de una circunferencia en su forma canónica es:____________________________

INSTRUCCIONES. Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

3.- (   ) Un helicóptero se mantiene sobrevolando a una distancia constante de 12 km de una montaña, esperando rescatar a una persona que está en la cima. Considerando la cima de la montaña como el centro ¿Cuál es la ecuación que representa la trayectoria?

a) $x^2 + y^2 = 12^2$
b) $x^2 + y^2 = - 12^2$
c) $x^2 - y^2 = 12^2$
d) $x^2 + y^2 = 0$

4.- Un barco se mantiene en el mar a una distancia de 5 km del puerto, si se considera el puerto como el centro ¿Cuál es la ecuación que describe la trayectoria?

a) $x^2 + y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 25 = 0$
c) $x^2 + y^2 = - 25$
d) $x^2 - y^2 – 25 = 0$

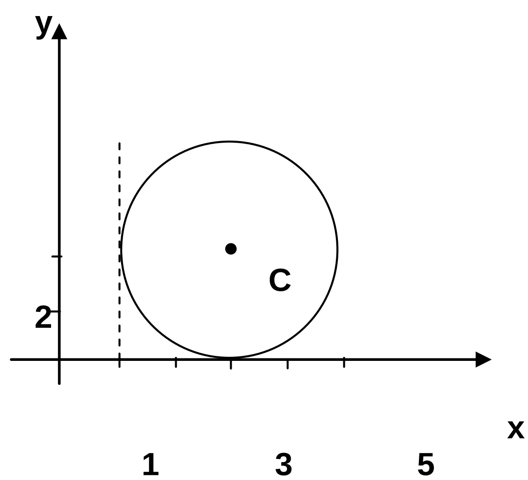
5.- (   ) Irma compra a su hijo un pastel de 80cm de largo por 30cm de ancho y al repartirlo hace un corte circular en el centro de un diámetro de 6cm ¿Cual es la ecuación que representa el corte?

a) $x^2 + y^2 – 80x – 30y + 1816 = 0$
b) $x^2 + y^2 – 80x – 30y – 1816 = 0$
c) $x^2 + y^2 – 80x + 30y + 1816 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 80x – 30y + 1816 = 0$

6.- (   ) En el patio de una escuela se tiene una alberca circular de 4m de radio la cual está situada con respecto a una columna a una distancia de de 5m al norte y 6m al este ¿Cual es la ecuación que representa la alberca?

a) $x^2 + y^2 – 12x – 10y + 77 = 0$
b) $x^2 + y^2 – 12x – 10y – 77 = 0$
c) $x^2 + y^2 – 12x – 10y + 45 = 0$
d) $x^2 + y^2 – 12x – 10y – 45 = 0$

7.- (   ) Observa la figura siguiente:



¿Cuál es la ecuación de la circunferencia?

a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

b) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

d) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

8.- (   ) ¿Cuáles son las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia que tiene como ecuación $(x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 9$?

a) C(- 6, 7) radio r = 3

b) C(6, 7) radio r = 3

c) C(6, 7) radio r = 9

d) C(- 6, 7) radio r = 9

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
2	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
3	**a**
4	**b**
5	**a**
6	**c**
7	**a**
8	**a**

TEMA 3.3 ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

APRENDIZAJES
• Transformar una ecuación de la forma ordinaria a la forma general. • Transformar una ecuación de la forma general a la forma ordinaria.

Hemos considerado que la ecuación general de una circunferencia tiene la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sin embargo también podemos tener el proceso inverso en el cual se tenga la ecuación de la circunferencia en su forma general y se desean calcular sus elementos (centro y radio), como en el siguiente problema:

El servicio sismológico del observatorio de Tacubaya detecta en la ciudad de México un sismo con origen en las costas de Colima, simultáneamente una sacudida de mediana intensidad se registra en el volcán Popocatépetl, teniendo su trayectoria una ecuación dada por:

$$x^2 + y^2 - 122x - 16y + 3721 = 0$$

si recuerdas la ecuación de la circunferencia en su **forma ordinaria** es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y la ecuación en su forma general **esta dada por:**

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

realizando una comparación:

$$x^2 + y^2 - 122x - 16y + 3721 = 0$$

$$D = -122 \text{ y } D = -2h \text{ entonces: } h = \frac{-122}{-2} \quad h = 61$$

$$E = -16 \text{ y } E = -2k \text{ entonces } k = \frac{-16}{-2} \quad k = 8$$

$$\boldsymbol{F = 3721 \text{ y } h^2 + k^2 - r^2 = F}$$

$$\boldsymbol{(61)^2 + (8)^2 - r^2 = 3721}$$

$$\boldsymbol{3721 + 64 - 3721 = r^2}$$

$$\boldsymbol{64 = r^2 \text{ y } r = 8}$$

Se tiene entonces que su centro C(h, k) está en las coordenadas (61, 8) y tiene un radio de 8 u.

Otra forma de resolverlo es completando los trinomios cuadrados perfectos, analicemos el procedimiento:

$$x^2 + y^2 - 122x - 16y + 3721 = 0$$

Recuerda que para completar el trinomio cuadrado perfecto debes agrupar los términos con las mismas incógnitas: $x^2 + y^2 - 122x - 16y + 3721 = 0$

$$x^2 - 122x + y^2 - 16y = -3721$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto, debemos considerar el coeficiente del término lineal de cada una de las incógnitas, dividirlo entre dos y elevarlo al cuadrado para sumarlo a cada miembro de la ecuación, entonces:

$$x^2 - 122x + (-61)^2 + y^2 - 16y + (-8)^2 = -3721 (-61)^2 + (-8)^2$$

$$x^2 - 122x + 3721 + y^2 - 16y + 64 = -3721 + 3721 + 64$$

factorizando: $(x - 61)^2 + (y - 8)^2 = 64$

comparando con: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

entonces: $-h = -61$ $\quad k = -8$ $\quad r^2 = 64$

$h = 61$ $\quad k = 8$ $\quad r = 8$

Por lo que se trata de una circunferencia de centro C(h, k) y radio r, entonces:

C(61, 8) y radio r = 8 u.

Analiza el siguiente ejemplo:

La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 4x - 12y + 4 = 0$, obtén el valor de sus elementos.

En este caso los coeficientes no son unitarios por lo cual cada miembro de la ecuación lo dividiremos entre 4; entonces:

$$\frac{4x^2 + 4y^2 - 8x - 24y + 4}{4} = \frac{0}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$$

Completando los trinomios cuadrados perfectos:

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = -1 + 1 + 9$$

factorizando: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

comparando con: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

entonces: $-h = -1$ $\quad -k = -3$ $\quad r^2 = 9$

$h = 1$ $\quad k = 3$ $\quad r = 3$

Se trata de una circunferencia con centro C(h, k) cuyas coordenadas son C(1, 3) y radio $r = 3$

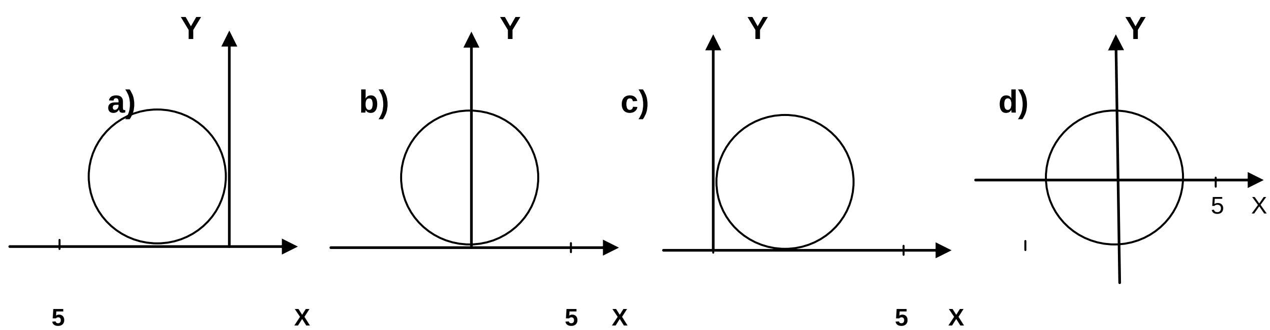
EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

1.- (   ) La ecuación general de la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$ *es:*

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$*
d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$

2.- (   ) Una circunferencia tiene como ecuación es $x^2 + y^2 = 25$; su gráfica es:



3.- (   ) Una circunferencia tiene como centro C(0, 3) y diámetro de 16u; la ecuación en su forma general es:

a) $x^2 + y^2 - 6y + 55 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6y - 55 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6y + 55 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6y - 55 = 0$

4.- (   ) Los elementos de una circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ son:

a) *C (- 4, - 3) radio = 5*
b) *C (- 4, 3) radio = 5*
c) *C (- 4, - 3) radio = 5*
d) *C (4, 3) radio = 5*

5.- (   ) Una circunferencia tiene como ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$, tiene como ecuación ordinaria:

a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 4$
d) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

6.- (   )¿Cuál es la ecuación en su forma ordinaria de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$

a) $(x+1)^2 + (y+1/2)^2 = 25/4$
b) $(x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 25/4$
c) $(x-1)^2 + (y+1/2)^2 = 25/4$
d) $(x+1)^2 + (y-1/2)^2 = 25/4$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**c**
2	**d**
3	**b**
4	**a**
5	**d**
6	**b**

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Los siguientes ejercicios buscan reafirmar tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas. Utiliza hojas aparte para efectuar los procedimientos.

Cuentas con **60 minutos** para resolver estos ejercicios.

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la línea la(s) palabra(s) que complementan el enunciado.

1.- Los elementos que definen una circunferencia son las coordenadas de su ________ y el valor de su ______________________.

2.- La ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen, en su forma ordinaria es:____________________________.

INSTRUCCIONES: Lee cada uno de los ejercicios, escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

3.- (   ) Se desea construir un jardín en un terreno cuadrado de 8m de lado, colocando en el centro un dispositivo para regar, el valor del radio es:

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

4.- (   ) Un trompo gira alrededor de su propio eje y tiene un alcance de 2 m, ¿cuál es la ecuación que describe su trayectoria?

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 0$

c) $x^2 - y^2 = 4$

d) $x^2 - y^2 = 0$

5.- (   ) A partir del centro de Xochimilco (0,0) un circo se instala en las coordenadas 6 Km al este, 2 km al sur, desea colocar propaganda a partir del punto donde se instala y alrededor con un alcance de 3km de distancia a la que se encuentra, ¿cuál es la ecuación que describe la circunferencia?

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 36$

c) $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 9$

d) $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 36$

6.- (   ) La ecuación general de una circunferencia con C (- 1, 3) y radio 5 es:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 15 = 0$

c) $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

7.- (   ) Una circunferencia tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$, la ecuación en su forma ordinaria es:

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 0$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

d) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**Centro y radio**
2	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
3	**b**
4	**a**
5	**c**
6	**a**
7	**d**

Unidad IV

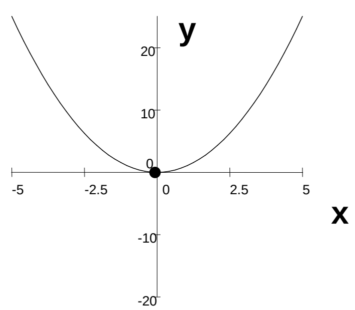
La Parábola

4.1 CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

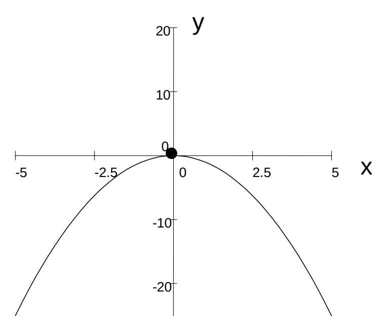
APRENDIZAJES
• Resolver problemas que involucren los elementos de una parábola: parámetro “p”, lado recto, directriz, etc.

En Matemáticas II, estudiaste las funciones cuadráticas y observaste que su grafica correspondía a una parábola, cuya expresión algebraica esta dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como recordarás, si el coeficiente del término de segundo grado es un número positivo, las astas de la parábola abren hacia arriba y se dice que es *cóncava hacia arriba o de concavidad positiva*; en caso de que el signo sea negativo se dice que es *cóncava hacia abajo o de concavidad negativa* y las astas abren hacia abajo.

Si la parábola tiene concavidad positiva la función es decreciente hasta alcanzar un valor mínimo para luego ser creciente. Si tiene concavidad negativa la función es creciente hasta alcanzar un valor máximo para luego ser decreciente. El punto donde se encuentra el mínimo o máximo se denomina vértice de la parábola. Observa las siguientes figuras con vértice se encuentra en el origen:



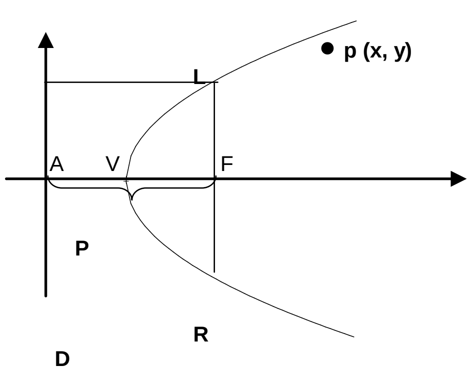
y



Parábola de concavidad positiva **Parábola de concavidad negativa**

Sin embargo ahora en Matemáticas III, estudiáremos la parábola como un lugar geométrico por lo que puede presentar otras posiciones, definiremos a la parábola.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta denominada *directriz*. Observa la identificación de los elementos en la siguiente figura.



Haciendo coincidir la figura con los ejes coordenados, el vértice V con el origen (0, cero) y el eje focal con el eje x para cualquier punto P(x, y) se tiene, por definición de la parábola:

$$PF = PQ$$

Aplicando la relación de la distancia entre dos puntos:

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$PQ = QM + MP = p + x$$

Como equidistan, esto es las dos distancias deben ser iguales, entonces:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = p + x$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$(x - p)^2 + y^2 = (p + x)^2$$

Desarrollando los binomios:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

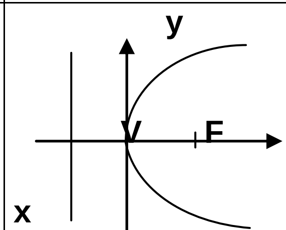
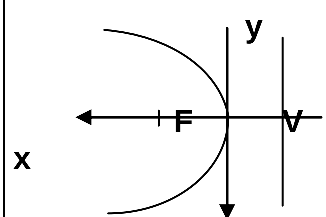
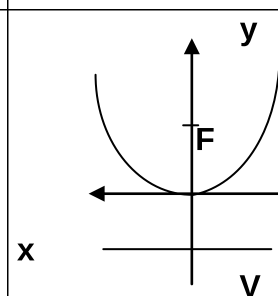
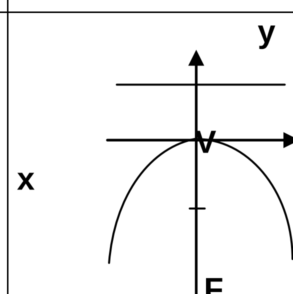
$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 - x^2 - 2xp - p^2 = 0$$

$$-4px + y^2 = 0$$

$$y^2 = 4px$$

Que corresponde a la ecuación de la parábola con vértice en el origen, con el eje focal horizontal sobre el eje “x” y como $p > 0$ la parábola esta abierta a la derecha.

Observa el siguiente cuadro.

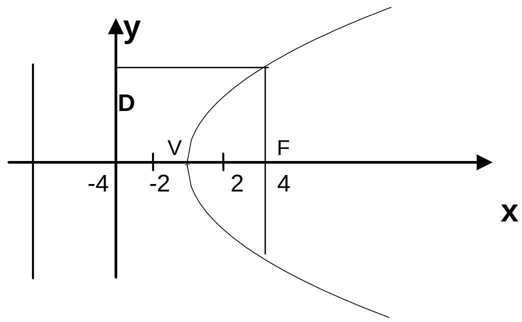
Expresión algebraica	Características	Grafica
$y^2 = 4px$	Parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x y como p > 0 la parábola esta abierta a la derecha.	
$y^2 = -4px$	Parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x y como p < 0 la parábola esta abierta a la izquierda.	
$x^2 = 4py$	Parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x y como p > 0 la parábola abre hacia arriba.	
$x^2 = -4py$	Parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x y como p < 0 la parábola abre hacia abajo.	

Veamos la aplicación en los siguientes ejemplos:

La ecuación de una parábola es $y^2 = 16x$, realiza la gráfica y obtén el valor de cada uno de los elementos**.**

Como la incógnita que está elevada al cuadrado es “y” se trata de una parábola horizontal con vértice en el origen. Realizando una analogía con la expresión en su forma ordinaria tenemos:

$y^2 = 16x$
$y^2 = 4px$
Por lo que:
$4p = 16$
$p = 4$



A partir del vértice (0, 0) consideramos 4 unidades a la derecha y 4 unidades a la izquierda, entonces las coordenadas del foco son F(4, 0) y la ecuación de la directriz D = es x = - 4.

El valor del lado recto es LR = 4p
LR = 4(4) = 16.

Analicemos otro ejercicio:

Obtén la ecuación de la parábola en su forma ordinaria si su foco es F(0, 3) y tiene vértice en el origen. Realiza su gráfica.

Al señalar gráficamente los datos disponibles se tiene una parábola vertical con vértice (0, 0) y como la distancia entre el vértice y el foco es de 3 u, el parámetro p = 3, entonces es de la forma:

$x^2 = 4py$

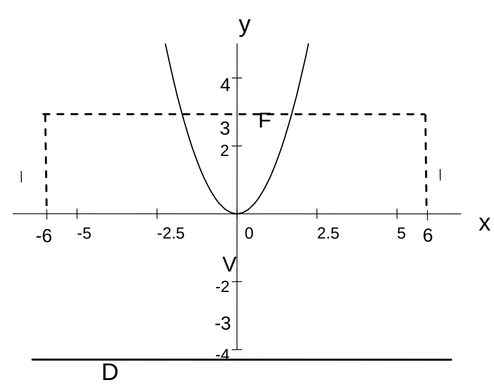
$x^2 = 4(3)x$

$x^2 = 12y$

El lado recto LR = 4p

LR = 4(3) = 12.

La Directriz D es x = -3



EJERCICIOS

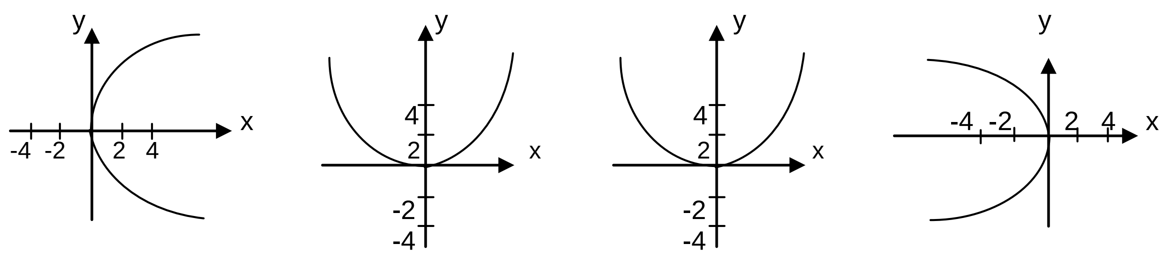
INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) respuesta (s) que complementen correctamente.

1.- Los elementos de una parábola son el foco y la ______________________________________.

2.- La expresión algebraica de una parábola horizontal con vértice en el origen es: _____________________________________-.

INSTRUCCIONES. **Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.**

3.- (   ) La gráfica de una parábola con V(0, 0) y valor de p = - 4 es:



a) **b)** **c)** **d)**

4.- (   ) Las coordenadas del foco de una parábola cuya ecuación es $y^2 = 12x$ es:

a) F(- 3, 0)
b) F(0, 3)
c) F(-3, 0)
d) F(0, -3)

5.- (   ) Una parábola tiene la expresión $x^2 = y$, la ecuación de su directriz es:

a) y = -1/4
b) y = 0
c) y = 1
d) y = 4

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**directriz**
2	$\mathbf{y^2 = 12x}$
3	**c**
4	**a**
5	**b**

TEMA 4.2 ECUACIONES ORDINARIAS DE LA PARÁBOLA

APRENDIZAJES
• Resolver problemas en donde se apliquen las propiedades geométricas y/o analíticas de parábolas con vértice en el origen. • Resolver problemas en donde se apliquen las propiedades geométricas y/o analíticas de parábolas con vértice fuera del origen.

Cuando una parábola tiene su vértice en el origen, las ecuaciones pueden tener la forma: $x^2 = 4py$ ó $y^2 = 4px$, sin embargo cuando el vértice de la parábola tiene como coordenadas V(h, k); entonces las ecuaciones se transforman en:

Ecuaciones ordinarias	$(x – h)^2 = 4p(y – k)$	$(y – k)^2 = 4p(x – h)$
Desarrollando los binomios	$x^2 – 2xh + h^2 = 4py – 4pk$	$y^2 – 2yk + k^2 = 4py – 4ph$
Igualando a cero	$x^2 – 2xh + h^2 – 4py + 4pk = 0$	$y^2 – 2yk + k^2 - 4py+ 4ph = 0$
Si	$- 2h = D \quad - 4p = E \quad h^2 + 4pk = F$	$- 4p = D \quad - 2k = E \quad h^2 + 4pk = F$
Entonces	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Que corresponde a la ecuación general de la parábola.

Analicemos los siguientes ejemplos.

Las ondas de telecomunicaciones llegan a la superficie de una antena en forma paralela al eje horizontal, que tiene 2m de ancho. Si consideramos que la sección parabólica está situada en el origen de la parábola, obtén la ecuación que la representa.

Por tratarse de una parábola horizontal la ecuación es $y^2 = 4px$, para obtener el valor de p, en el enunciado se indica que el ancho es de 2m que equivale al lado recto; entonces,

$$LR = 4p$$

$$2 = 4p$$

$$\underline{\frac{2}{4} = p}\text{, por lo que } \underline{p = \frac{1}{2}}$$

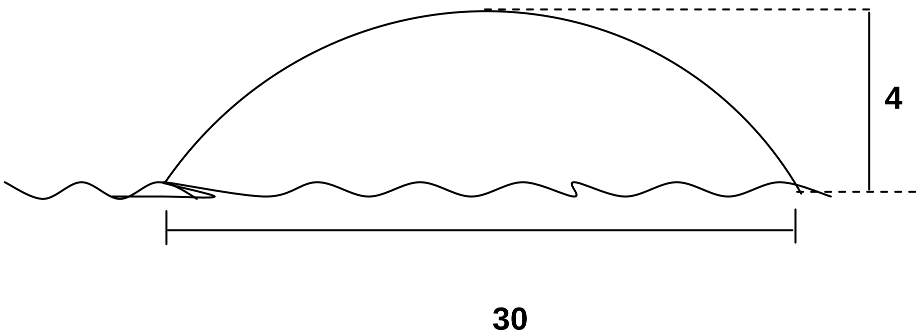
Por lo tanto la ecuación es: $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(1/2)x$$

$$y^2 = 2x$$

Analicemos otro problema.

El arco parabólico de un puente tiene las dimensiones indicadas en la siguiente figura.
Tenemos que calcular la distancia a la que se encuentra el foco del vértice si el origen del plano cartesiano está en el vértice; y, posteriormente, obtendremos la ecuación de la parábola.



En la figura observamos que las coordenadas del vértice son V(0, 0) y como se trata de una parábola vertical con vértice en el origen que abre hacia abajo la ecuación es:

$$\mathbf{x^2 = -4py.}$$

Como el punto (- 15, 8) es un punto de la parábola, se tiene:

$$(-15)^2 = -4p(-8)$$
$$225 = 32p$$
$$\frac{225}{32} = p$$
$$7.03 = p$$

a partir del vértice el foco esta a una distancia de 7.03 m.

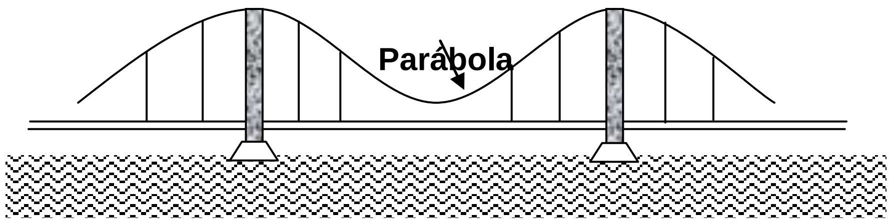
La ecuación de la parábola la obtenemos al sustituir el valor del parámetro p en la ecuación:

$$x^2 = -4py$$
$$x^2 = -4(7.03)y$$

por lo tanto la ecuación es: $x^2 = -28.12y$

Veamos otro ejemplo.

La distancia entre dos soportes verticales de un puente colgante es de 100m y la flecha del cable es de 15m, como se muestra en la figura. Veremos como obtener la ecuación, así como los elementos de la parábola



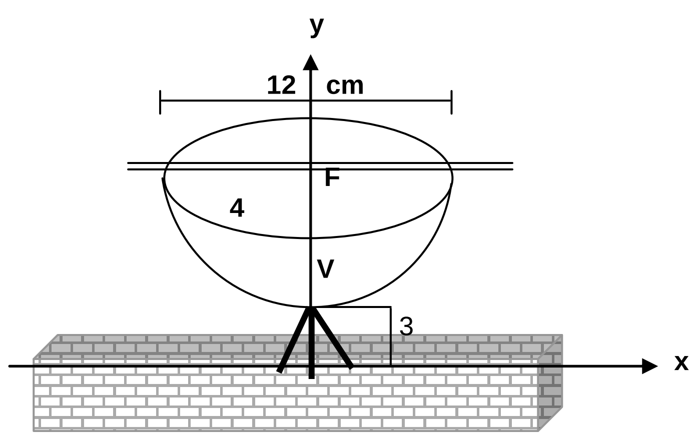
Las coordenadas del vértice son (50, 15), el valor del parámetro p es 15, las coordenadas del Foco son F(50, 30) y como la parábola abre hacia arriba es vertical y positiva, con vértice fuera del origen.
Entonces su ecuación esta dada por:

$$\mathbf{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$
$$\mathbf{(x - 50)^2 = 4(15)(y - 15)}$$
$$\mathbf{x^2 - 100x - 2500 = 60y - 900}$$
$$\mathbf{x^2 - 100x - 60y - 1600 = 0}$$

Analicemos el siguiente problema.

Un condensador de calor solar empleado para calentar agua se construye con piezas de acero inoxidable en forma de parábola. Si el diámetro del calentador es de 12m y el agua fluye a través de un tubo que pasa por el foco de la parábola ubicado a 4m, indica las coordenadas de:

- **el Vértice**
- **el Foco**
- La ecuación de la parábola.



Las coordenadas del vértice son V(0, 3)

El Foco esta 4m arriba por lo que F(0, 7), esto nos indica que p vale 4

Por tratarse de una parábola vertical, con centro fuera del origen, la ecuación está dada por:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$(x - 0)^2 = 4(4)(y - 3)$$
$$x^2 = 16(y - 3)$$
$$x^2 = 16y - 48$$
$$x^2 - 16y + 48 = 0$$

EJERCICIOS.

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) respuesta(s) correcta.

1.- La ecuación ordinaria de una parábola horizontal que abre hacia la izquierda con vértice fuera del origen es___________________________.

2.- La ecuación de una parábola es $x^2 = 20py$, cuáles serán las coordenadas de su Foco ____________.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

3.- ( ) El arco parabólico en un puente de concreto tiene un claro de 50m por arriba del agua a una distancia de claro de 200m , si consideramos el vértice de la parábola, en el origen y la parábola abre hacia abajo su ecuación es:

a) $x^2 = -50y$
b) $x^2 = 50y$
c) $x^2 = -200y$
d) $x^2 = 200y$

4.- ( ) El punto de recepción de una antena parabólica de televisión se localiza en el foco, el cual se encuentra a 1m del vértice. Si el vértice se localiza en el origen y la parábola abre a la derecha, su ecuación es:

a) $y^2 - 3x = 0$
b) $y^2 + 3x = 0$
c) $y^2 + 12x = 0$
d) $y^2 - 12x = 0$

5.- ( ) ¿Cuál es la distancia a la que se deben colocar los extremos de un puente colgante si su longitud es igual al lado recto de una parábola, conociendo que el punto medio se encuentra a 10 metros arriba de la carretera y su foco a 90 metros de altura?

a) 32 m.
b) 160 m.
c) 320 m.
d) 640 m.

6.- ( ) Un puente colgante tiene forma de parábola; si su vértice está en el punto V(0,5) y su foco tiene como coordenadas (0, 85), su ecuación en la forma canónica es:

a) $x^2 = -320(y - 5)$
b) $x^2 = 320(y - 5)$
c) $y^2 = -320(x - 5)$
d) $y^2 = 320(x - 5)$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
2	F(0, 5)
3	c
4	d
5	c
6	b

TEMA 4.3 ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

APRENDIZAJES
• Transformar una ecuación de la forma ordinaria a la forma general. • Transformar una ecuación de la forma general a la forma ordinaria.

Hemos considerado que las ecuaciones de una parábola que tienen su vértice en el origen corresponden a la forma:

$$x^2 = 4py \text{ ó } y^2 = 4px.$$

Cuando el vértice de la parábola tiene como coordenadas V(h, k) éstas se transforman en:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ ó } x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sin embargo también podemos tener el proceso inverso en el cual se tenga la ecuación de la parábola en su forma general y se desean calcular sus elementos (vértice, foco, lado recto), como veremos en los siguientes problemas:

Un puente tiene un arco en forma parabólica, su ecuación está dada por la expresión $x^2 + 25y = 0$. Realizaremos la gráfica y obtendremos la distancia que debe tener el puente de orilla a orilla.

Como la ecuación tiene la forma $x^2 + 25y = 0$, entonces:

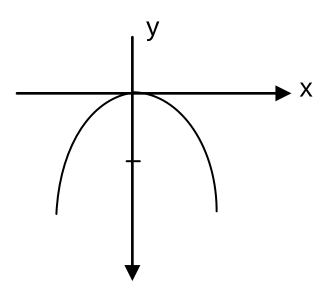
$$x^2 = -25y$$

como $x^2 = -4py$, corresponde a una parábola vertical que abre hacia abajo.

Por analogía: $-4p = -25$

$$p = \frac{-25}{-4}$$

$p = 6.25$



El valor del lado recto corresponde a la distancia del puente de orilla a orilla, o sea LR = 4p

por lo que LR = 4(6.25)
LR = 25 u

Analicemos el siguiente ejemplo.

Un satélite que escapa a la fuerza gravitacional terrestre sigue una trayectoria parabólica dada por la ecuación $y^2 - 4100y - 8200x - 4202500 = 0$

Vamos a encontrar las coordenadas del vértice.

Observamos que la incógnita que está elevada al cuadrado es “y” por lo que para obtener los elementos de la parábola la transformaremos a la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

entonces,

$$y^2 - 4100y - 8200x - 4202500 = 0$$
$$y^2 - 4100y = 8200x + 4202500$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 - 4100y = 8200x + 4202500$$
$$y^2 - 4100y + 4202500 = 8200x + 4202500 + 4202500$$
$$(y - 4100)^2 = 8200x + 8405000$$
$$(y - 4100)^2 = 8200(x + 1025)$$
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Por analogía: $-k = -4100$ $\quad -h = 1025$ $\quad 4p = 8200$

$k = 4100$ $\quad h = 1025$ $\quad p = \frac{8200}{4} = 2050$

entonces $V(h, k)$ $\quad V(1025, 4100)$.

En el siguiente ejemplo obtendremos los elementos y trazaremos la gráfica de la ecuación de una parábola que está dada por la expresión $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$.

Observamos que la incógnita está elevada al cuadrado, por lo tanto se debe transformar a la forma ordinaria:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)\text{, entonces:}$$
$$y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$$
$$y^2 + 2y = 4x - 9$$
$$y^2 + 2y = 4x - 9$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 + 2y + 1 = 4x - 9 + 1$$
$$y^2 + 2y + 1 = 4x - 8$$

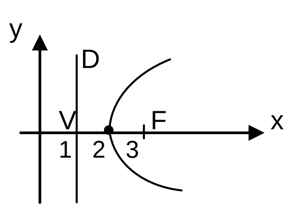
Factorizando $(y + 1)^2 = 4(x - 2)$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Por analogía $-k = -1$ $\quad -h = -2 \quad 4p = 4$

$k = 1$ $\quad h = 2$ $\quad p = 1$

Entonces las coordenadas del vértice son V(2, 1) y como p = 1 el Foco tiene como coordenadas F(3,1). Realicemos la gráfica.



EJERCICIOS.

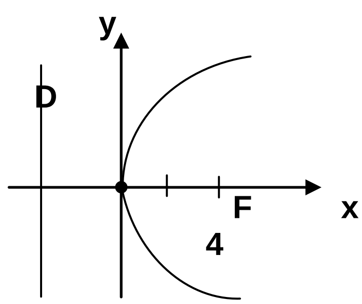
INSTRUCCIONES. Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complementan correctamente.

1.- La ecuación de una parábola es $(x - 2)^2 = 16y$ por lo que se trata de una parábola_________ que abre hacia____________________.

2.- La ecuación de una parábola es $y^2 = 20px$, las coordenadas de su Foco son____________.

INSTRUCCIONES. Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

3.- (   ) Observa la figura.



La ecuación de la parábola es:

a) $y^2 = -6x$
b) $y^2 = - 24x$
c) $y^2 = 6x$
d) $y^2 = 24x$

4.- (   ) Una parábola con Vértice (0, 2) y Foco en (4, 29) tiene como ecuación:

a) $x^2 - 16x - 4y + 4 = 0$
b) $x^2 + 16x - 4y + 4 = 0$
c) $y^2 - 16x - 4y + 4 = 0$
d) $y^2 - 16x - 4y - 4 = 0$

5.- (   ) Si una parábola que abre hacia abajo tiene un lado recto de 16 m, y las coordenadas de su vértice son (- 2, - 3) ¿cuál es su ecuación?

a) $x^2 + 4x + 16y + 52 = 0$
b) $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$
c) $y^2 - 4x - 16y + 52 = 0$

d) $y^2 - 4x - 16y - 52 = 0$

6.- (   ) La ecuación de una parábola es $x^2 - 6x - y + 5 = 0$, ¿cuáles son las coordenadas de su vértice?

a) (3, - 4)
b) (3, 4)
c) (- 3, 4)
d) (- 3, - 4)

7.- (   ) Las coordenadas del foco de una parábola cuya ecuación es $y^2 + 20x - 4y - 56 = 0$ son:

a) (- 2, - 2)
b) (-2, 2)
c) (2, - 2)
d (2, 2)

8.- (   ) Una parábola tiene como ecuación $x^2 - 6x - 12y + 9 = 0$, por lo que la ecuación en su forma ordinaria es:

a) $(x - 3)^2 = 12y$
b) $(x + 3)^2 = 12y$
c) $(x - 3)^2 = - 12y$
d) $(x + 3)^2 = - 12y$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**Positiva, arriba**
2	$\mathbf{y^2 = 20px}$
3	**d**
4	**c**
5	**a**
6	**a**
7	**b**
8	**a**

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

A continuación se te presentan algunos ejercicios, con la finalidad de que reafirmes tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas. Utiliza hojas aparate para efectuar los procedimientos.

Cuentas con 40 minutos para resolverlos.

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la línea la(s) palabra(s) que complementan el enunciado.

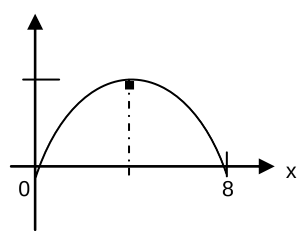
1.- Un arco sobre el río Coatzacoalcos, en el estado de Veracruz ha sido construido en forma parabólica con una longitud horizontal de 1200 km, considerando la parte más alta como (0,0) y ubicando su foco a 300m por debajo de él, entonces.

I El valor del lado recto es_________________________

II Las coordenadas del foco son_____________________

III La ecuación del lugar geométrico que define el puente__________________

2. La gráfica siguiente muestra la trayectoria descrita por una piedra lanzada por una persona.



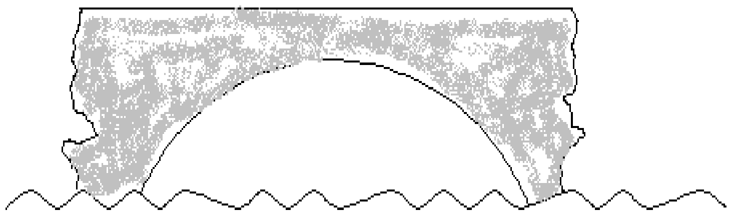
Considerando el tiempo t = 0 desde que avienta la piedra hasta el tiempo t = 8 que vuelve a caer al suelo como la longitud del lado recto, determina:

I Las coordenadas de la altura máxima__________________________________

II La ecuación canónica que representa la trayectoria________________________

II. INSTRUCCIÓNES: Anota en el paréntesis la letra que corresponde a la respuesta correcta.

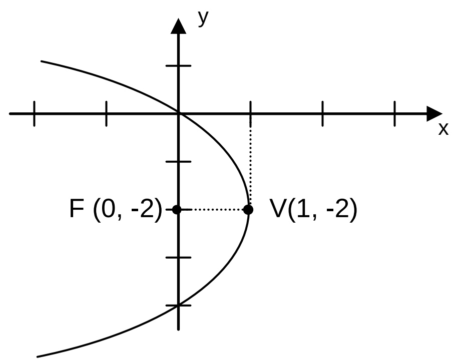
3.- (   ) El arco parabólico del puente de concreto que se ve en la figura debe tener un claro de 50m sobre el agua y abrirse una distancia de 200 m. Encuentra la ecuación de la parábola considerando un sistema coordenado en el origen del vértice de la parábola.



Puente

a) $x - 200\,y^2 = 0$
b) $x + 200\,y^2 = 0$
c) $x - 50\,y^2 = 0$
d) $x + 50\,y^2 = 0$

4.- (   ) Analiza la grafica.



Indica cual es la ecuación de la parábola.

a) $y^2 + 4x + 4y = 0$
b) $y^2 + 4y - 4x = 0$
c) $x^2 + 4x - 4y = 0$
d) $x^2 + 4x + 4y = 0$

5. (   ) De la parábola $y^2 + 8x - 4y - 20 = 0$, la ecuación en su forma ordinaria es:

a) $(y + 2)^2 = -8(x - 3)$
b) $(y - 2)^2 = -8(x - 3)$
c) $(x + 2)^2 = -8(x - 3)$
d) $(x - 2)^2 = -8(x - 3)$

TABLA DE COMPROBACIÓN

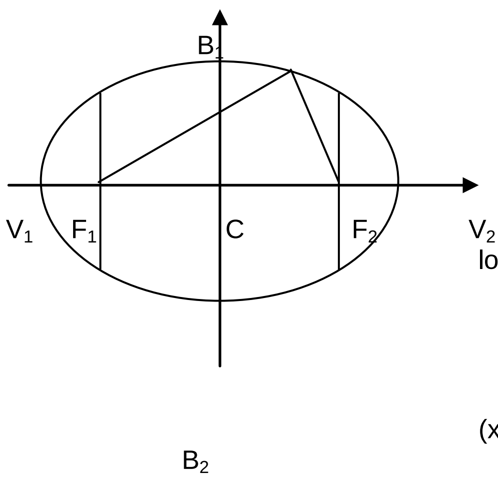
Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**I LR = 1200** **II F(0, - 300)** **III $x^2 = -1200y$**
2	**I (4, 2)** **II $(x - 4)^2 = -8(y - 2)$**
3	**b**
4	**a**
5	**b**

Unidad V
Secciones Cónicas y Ecuaciones cuadráticas

5.1 LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO: ELIPSE

APRENDIZAJES
• Obtener las ecuaciones particulares de la elipse dados los elementos que la definen • . Resolver problemas que involucren la elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos siempre es una constante.

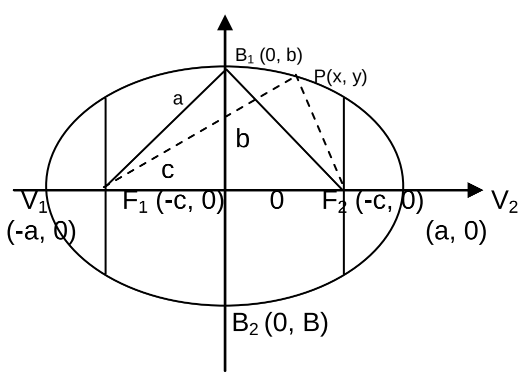


F_1, F_2 Focos
L Eje focal
V_1 V_2 Vértices, puntos donde la elipse corta al eje focal
C Centro, punto medio del segmento que une los focos.
B_1B_2 Eje menor.

LR Lado recto de la elipse, uno en cada foco; su longitud es el ancho focal. $LR = \frac{2b^2}{a}$

P Es un punto cualquiera de la curva de coordenadas (x,y)

Para deducir la ecuación de la elipse; debemos hacer coincidir la figura anterior con los ejes coordenados así como el centro C con el origen O y el eje focal con el eje x; de igual manera:



2a Distancia desde un punto P(x, y) a los focos, el eje mayor.
a Semieje mayor, distancia del centro a uno de los vértices.
2b Distancia entre B_1 y B_2 eje menor
b Semieje menor
2c Distancia entre los focos.
c Distancia del centro a uno de los focos.
F_1 (-c,0) Coordenadas de los focos
F_2 (c,0)
V_1 (-a,0) Coordenada de los vértices
V_2 (a,0)
e Excentricidad = c/a

Considerando la definición de la elipse, tenemos

$$PF_1 + PF_2 = 2^a$$

Calculando las distancias del punto P a los focos

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Para simplificar pasamos el primer término al segundo miembro:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado cada miembro de la ecuación y simplificando:

$$\sqrt{\left((x-c)^2+y^2\right)^2}=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$\mathbf{(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2}$$

Desarrollando y simplificando, $\mathbf{x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a}\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2\ \mathbf{+2xc+c^2+y^2}$

$$\mathbf{4xc-4a^2=-4a}\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Dividiendo cada miembro de la ecuación entre **– 4,** $\mathbf{xc+a^2=a}\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado los dos miembros y ordenando**,** $\mathbf{a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)}$

Simplificando**,** $\mathbf{a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0}$

Agrupando y factorizando**,** $\mathbf{x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2c^2-a^4}$

$$\mathbf{(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^{2(}c^2-a^2)}$$

Multiplicando por **– 1 ambos miembros,** $\mathbf{(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)}$

Como se ve en la 2ª elipse, se forma el triángulo $F_1\,B_1\,O$ por lo que se aplica el teorema de Pitágoras

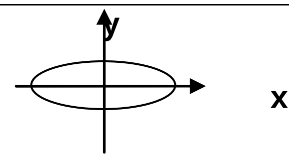
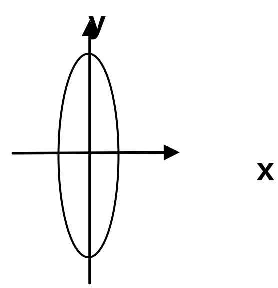
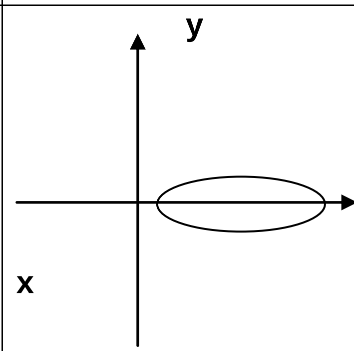
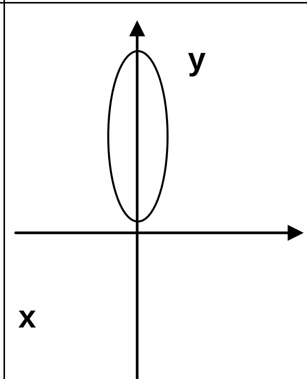
$$\mathbf{a^2=c^2+b^2}$$

$$\mathbf{a^2-c^2=b^2}$$

Sustituyendo, $\mathbf{b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2}$

Al dividir cada miembro entre a^2b^2, $\dfrac{b^2x^2}{a^2b^2}+\dfrac{a^2y^2}{a^2b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2}$

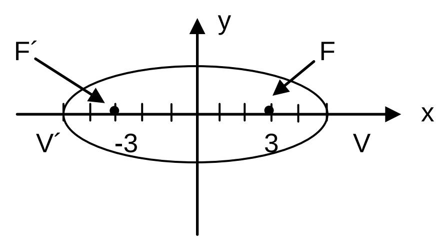
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$**,** Representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro en el origen, eje focal que coincide con el eje x. Así entonces se tienen las siguientes ecuaciones de la elipse:

Ecuación	Características	Gráfica
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **donde: a > b**	Que representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro en el origen, eje focal que coincide con el eje x.	
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ **donde: a > b**	Que representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro en el origen, eje focal que coincide con el eje y.	
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ **donde: a > b**	Que representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro fuera del origen (h, k), eje focal que coincide con el eje x.	
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ **donde: a > b**	Que representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro fuera del origen (h, k), eje focal que coincide con el eje y.	

Veamos la aplicación en los siguientes ejemplos:

Obtén la ecuación de la elipse con vértices en (± 5, 0) focos en (± 3, 0)

Al colocar los datos disponibles es un sistema de ejes coordenados se tiene:



Se trata de una elipse con centro en el origen, eje focal que coincide con el eje x, por lo que su fórmula es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El valor de a es la distancia del centro a uno de los vértices por lo que a = 5. El valor de c es la distancia del centro a uno de los focos c = 3.

$$\textbf{Entonces: } b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = (5)^2 - (3)^2$$
$$b^2 = 25 - 9$$
$$b^2 = 16 \qquad b = 4$$

Sustituyendo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{16^2}$$

Una elipse tiene como ecuación: $\frac{(x+1)^2}{16^2} + \frac{(y+2)^2}{25^2} = 1$

Obtén el valor y las coordenadas de sus elementos.

La ecuación tiene la forma: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ y representa la ecuación de la elipse en su forma canónica con centro fuera del origen (h, k), eje focal que coincide con el eje y. Por analogía

- h = 1	-k = 2	$a^2 = 25$	$b^2 = 16$
h = -1	k = - 2	a = 5	b = 4

Entonces las coordenadas del centro son C(- 1, - 2)

Eje mayor = 2a
= 2(5) = 10
Eje menor = 2b
= 2(4) = 8

Para las coordenadas del vértice debemos considerar que a partir del centro se cuentan 4 unidades hacia la derecha y hacia la izquierda, entonces V_1 = (- 5, - 2) y V_2(3, - 2).

Para los focos es necesario calcular el valor de c:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (5)^2 - (4)^2$$
$$c^2 = 25 - 16$$
$$c^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

De igual manera a partir del centro consideramos 3 unidades a la izquierda y tres a la derecha, las coordenadas son: F_1 (- 4, - 2) y F_2 (2, - 2)

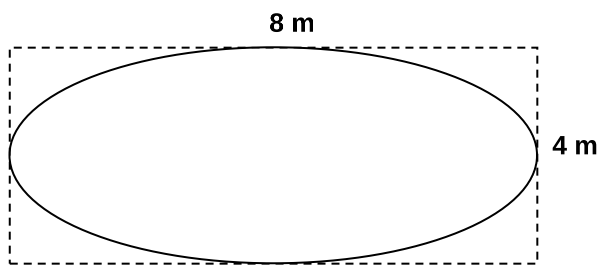
La elipse tiene múltiples aplicaciones, algunas de ellas son las órbitas de satélites, planetas y cometas; formas de galaxias, engranes y levas. Algunos alerones de aviones, cubiertas de comedores, fuentes públicas y domos en edificio, analicemos algunos de ellos.

Una cubierta elíptica de una mesa de comedor de 4 por 8 mt se va a hacer al cortar una hoja rectangular de triplay de 4 por 8 mt. Para dibujar la elipse en el triplay.

a) ¿A qué distancia se deben localizar los focos de cada orilla?

b) ¿Cuál es la ecuación que representa la elipse?

Realizamos la siguiente figura para representar la mesa:



En este caso el eje mayor es de 8m, por lo que $2a = 8$; $a = 4$

El eje menor es de 4m , por lo que $2b = 4$; $b = 2$

a) Como los focos tienen como coordenadas (-c, 0) y (c, 0) para calcular el valor de c se tiene:

$a^2 = b^2 + c^2$
$c^2 = a^2 - b^2$
$c^2 = (4)^2 - (2)^2$
$c^2 = 16 - 4$
$c^2 = 12$ $\quad c = \sqrt{12} = 3.46$

Las coordenadas donde se deben localizar los focos de cada orilla: $(-\sqrt{12}, 0)$ y $(\sqrt{12}, 0)$ ó $(-3.46, 0)$ y $(3.46, 0)$

b) Como a > b, la elipse tiene la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

que es la ecuación solicitada

Analicemos otro ejemplo

La excentricidad de la trayectoria elíptica que describe el satélite Morelos alrededor del sol es de 1/62, si la longitud de su eje mayor es de $2970(10)^8$ km obtén:
a) La magnitud del lado recto.

b) La ecuación de la elipse que describe el satélite Morelos alrededor del Sol, si este astro se encuentra en uno de sus focos.

El eje mayor es de $2970(10)^8$ km, entonces $2a = 2970(10)^8$ km $\Rightarrow$ $a = 1485(10)^8$ km

Como la excentricidad $e = \frac{c}{a}$

$$\frac{1}{62} = \frac{c}{1485(10)^8} = \frac{1485(10)^8}{62}$$

c = 23.951, 612(10)^8 km

Como b = $\sqrt{a^2 - c^2}$

b = $\sqrt{\left(1485(10)^8\right)^2 - \left(23.951612(10)^8\right)^2}$

b = 1484.8068 (10)^8 km

entonces: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(1484.8068X10^8\right)^2}{1485(10)^8}$

por lo que: LR = 2969.22(10)^8 km

b) Si se considera como origen de un sistema de ejes cartesianos al centro de la elipse que describe la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{1485(10)^8} + \frac{y^2}{\left(1484.8068(10)^8\right)^2} = 1$$

que es la ecuación solicitada

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES. Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que los complementen correctamente.

1.-La expresión e = c/a sirve para calcular la _________________________de una elipse.

2.- Una elipse con centro fuera del origen (h, k), eje focal que coincide con el eje "y" tiene como forma canónica: _______________________.

3.- El eje mayor de una elipse equivale a:_______________________________

INSTRUCCIONES. Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

4.- (   ) Una elipse tiene sus vértices en (0, ± 6) y excentricidad 2/3, su ecuación es:

a) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$

b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

c) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{20}=1$

d) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{36}=1$

5.- (   ) Los vértices de una elipse son: v(+/- 5, 0) y foco (3, 0), su ecuación es:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$

6.- (   ) El arco semielíptico en un puente de concreto debe tener un claro de 12 pies por arriba del agua y salvar una distancia de 40 pies. La ecuación de la elipse es:

a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{400}=1$

b)_ $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{144}=1$

c) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{40}=1$

d) $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$

7.- (   ) Los electrones del segundo y tercer orbital del átomo del uranio describen una elipse en cada nivel, si los focos son los puntos F(0, 5) y F(0, - 5), ¿cuál es la ecuación de la orbita del segundo orbital considerando que el semieje mayor es de 8 unidades atómicas y el tercer nivel tiene una excentricidad de ½.

a)_ $\frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{64}=1$

b) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

c) $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$

d) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$

8.- (   ) La máxima distancia a la que se aleja la Luna de la Tierra es de 403,200 Km. y la mínima es de 364,800 km. Obtén el valor de la excentricidad de la orbita elíptica.

a) 0.5

b) 0.1

c) 0.05

d) 0.01

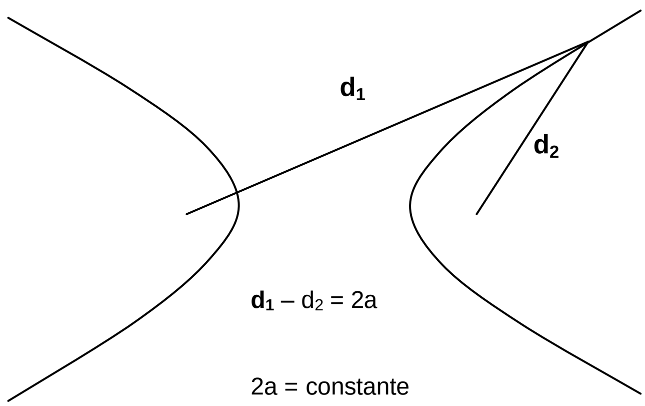
TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**Excentricidad**
2	**1** $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ **con a > b**
3	**2a**
4	**a**
5	**c**
6	**b**
7	**a**
8	**c**

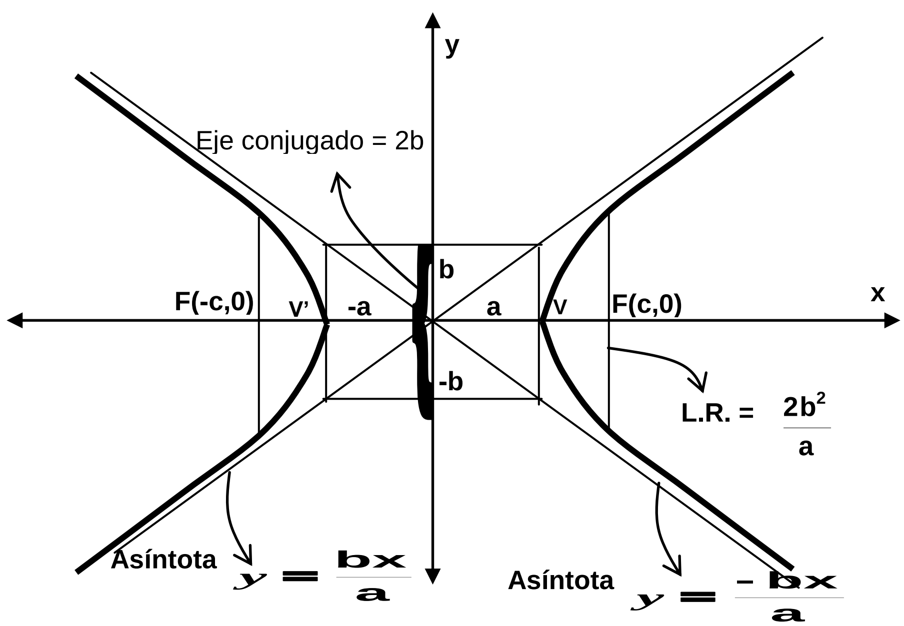
5.2 LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO: LA HIPÉRBOLA

APRENDIZAJES
• Obtener las ecuaciones particulares de la hipérbola dados los elementos que la definen. • Resolver problemas que involucren la hipérbola.

Otra de las figuras cónicas es la hipérbola, que se define como el lugar geométrico formado por puntos para los cuales la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



En la gráfica siguiente podemos observar algunos de sus elementos.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

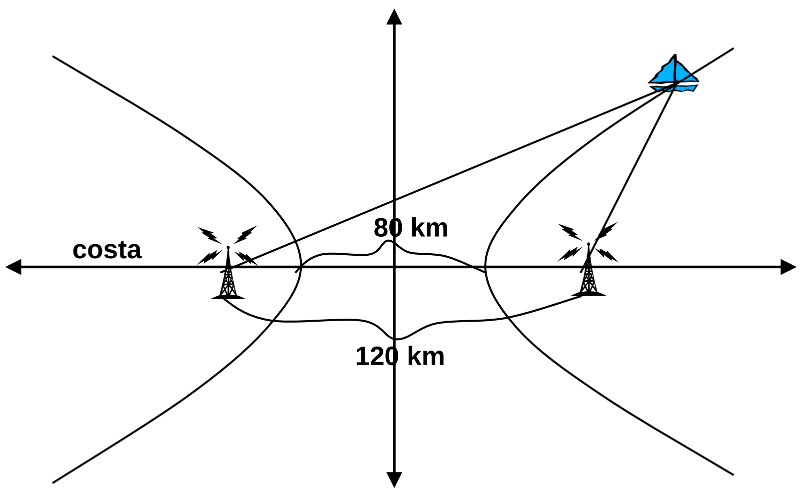
Como podrás observar la relación entre **a, b** y **c** se puede representar con el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La hipérbola tiene aplicaciones en el diseño de espejos hiperbólicos, en la ingeniería, en la navegación para determinar la posición de barcos y aviones por medio del sistema **LORAN** (**Lo**ng **Ra**nge **N**avigation "navegación de largo alcance"), etc.

Por ejemplo.

En una costa recta se encuentran dos radiofaros a 120 km de distancia uno del otro (ver figura) que emiten simultáneamente una señal de radio. Si un barco avanza hacia la costa sobre una rama de la hipérbola y sabemos que la distancia entre los vértices de la hipérbola es 80 km, ¿cuál es la menor distancia a la que se puede ubicar el barco del faro? y ¿cuál es la ecuación que representa esta situación?



La distancia entre los faros es de 120 kilómetros que equivale a la distancia entre los focos, es decir:

2c = 120 por lo que **C = 60**

La distancia entre los vértices es de 80 kilómetros, es decir, **2a = 80** por lo que **a = 40**

La menor distancia a la que puede llegar el barco del faro se ubica en el vértice de la derecha, la cual se calcula como la distancia que hay del origen al faro menos la distancia que hay del origen al vértice, lo que escribimos como:

60 – 40 = 20 por lo que la menor distancia es 20 km

Como tenemos el valor de **a** nos falta el valor de **b** para poder escribir la ecuación por lo que lo calcularemos empleando la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

sustituyendo los valores de **a, c**

$$60^2 = 40^2 + b^2$$

$$3600 = 1600 + b^2$$

$$3600 – 1600 = b^2$$

$$2000 = b^2$$

Entonces la ecuación nos queda como:

$$\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{2000} = 1$$

Veamos otro ejemplo.

En una hipérbola uno de los vértices tiene coordenadas V(12, 0) y foco F(13, 0) obtendremos los elementos desconocidos, la ecuación y construiremos la gráfica.

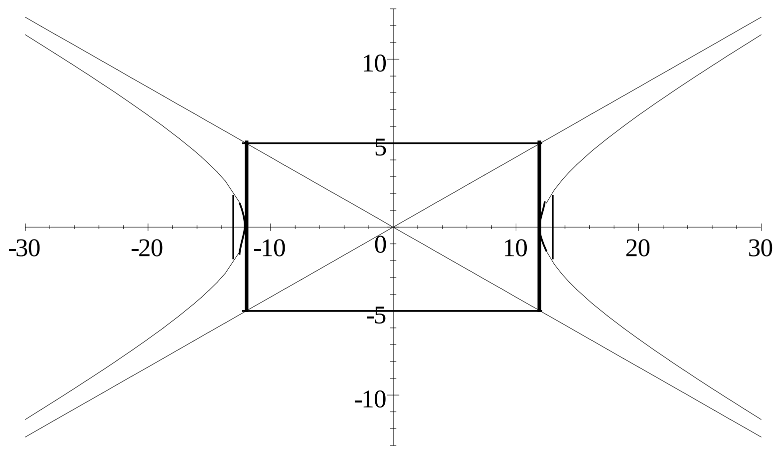
Para determinar los elementos que no se conocen y la ecuación de la hipérbola debemos tener los valores de **a, b** y **c**, ya que uno de los vértices tiene coordenadas V(a, 0) sustituyendo **a = 12,** las coordenadas del foco son F(c, 0) sustituyendo **c = 13,** con estos valores calculemos el valor de **b.**

$$13^2 = 12^2 + b^2$$
$$169 = 144 + b^2$$
$$169 - 144 = b^2$$
$$25 = b^2$$
$$5 = b$$

Como ya tenemos los valores de **a, b** y **c** al sustituir los mismos en los elementos de la hipérbola obtenemos la siguiente información:

Vértices	Focos	Asíntotas	Extremos del Eje conjugado	Extremos del lado recto
V'(-a,0) V'(-12,0) V(a,0) V(12,0)	F'(-c,0) F'(-13,0) F(c,0) F(13,0)	$y = \frac{bx}{a}$ $y = \frac{5x}{12}$ $y = \frac{-bx}{a}$ $y = \frac{-5x}{12}$	E'EC (0. – b) E'EC (0, - 5) EEC (0, b) EEC (0,5)	E'LR $(-c, \frac{b^2}{a})$ (-13,2.1) $(-c, \frac{-b^2}{a})$ (-13,-2.1) ELR $(c, \frac{b^2}{a})$ (13,2.1) $(c, \frac{-b^2}{a})$ (13,-2.1)

Con los datos de la tabla construimos la gráfica, la cual nos queda de la siguiente manera



La ecuación de la hipérbola se escribe como:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Así como las otras cónicas, la hipérbola también tiene una ecuación general que se escribe como: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ en donde ***A* y *B*** tienen signo diferente, esta ecuación puede ser transformada a la forma ordinaria aplicando un procedimiento similar al estudiado en la elipse.

Analicemos otro problema,

Vamos a obtener la ecuación ordinaria de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

Agrupemos los términos con la misma variable y el término independiente lo escribimos del lado derecho de la igualdad

$$4x^2 - 8x - 9y^2 + 36y = -4$$

Factoricemos el coeficiente de los términos cuadráticos

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) = -4$$

Completemos dos trinomios cuadrados perfectos en los paréntesis

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 - 36$$

Factoricemos los cuadrados perfectos y resolvamos el lado derecho de la igualdad

$$4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = -36$$

Dividamos la ecuación entre 36

$$\frac{4(x-1)^2}{-36} - \frac{9(y-2)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$$

$$\frac{(x-1)^2}{-9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1,$$ que es la ecuación solicitada

Se puede también realizar el procedimiento de escribir la ecuación ordinaria de una parábola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Vamos a estudiar otro ejemplo

Transformaremos la ecuación general de la hipérbola $\frac{(x-5)^2}{36} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$

Multipliquemos la ecuación por 36

$$(x-5)^2 - \frac{36(y+4)^2}{25} = 36$$

Multipliquemos por 25

$$25(x-5)^2 - 36(y+4)^2 = 900$$

Desarrollemos los cuadrados

$$25(x^2 – 10x + 25) – 36(y^2 + 8y + 16) = 900$$

Realicemos los productos indicados

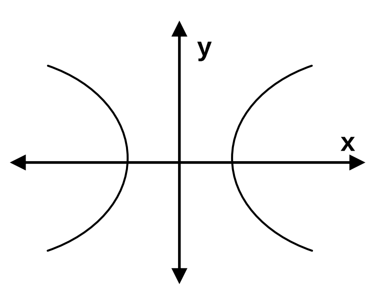
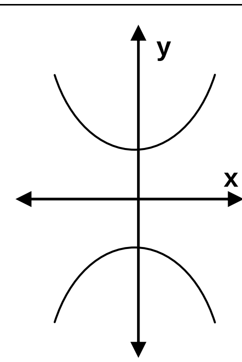
$$25x^2 – 250x + 625 – 36y^2 – 288y – 576 = 900$$

Igualando a cero y reduciendo

$$25x^2 – 36y^2 – 250x – 288y –851 = 0$$

obtenemos la ecuación general

A continuación escribiremos los elementos de las hipérbolas horizontal y vertical en una tabla para que puedas consultarlos y dar respuesta a los ejercicios propuestos.

Elementos	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Vértices	$V_1(-a,0)$ $V_2(a,0)$	$V_1(0,-a)$ $V_2(0,a)$
Focos	F(c,0) F'(-c,0)	F(0,c) F'(0,-c)
Longitud del lado recto	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Extremos de los lados rectos que pasan por los focos	$(c,\frac{b^2}{a})$ $(-c,\frac{b^2}{a})$ $(c,\frac{-b^2}{a})$ $(-c,\frac{-b^2}{a})$	$(\frac{b^2}{a},c)$ $(\frac{b^2}{a},-c)$ $(\frac{-b^2}{a},c)$ $(\frac{-b^2}{a},-c)$
Asíntotas	$y=\frac{bx}{a}$ $y=\frac{-bx}{a}$	$y=\frac{ax}{b}$ $y=\frac{-ax}{b}$
Longitud del lado recto	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Longitud del eje transversal	2a	2a
Longitud del eje conjugado	2b	2b
excentricidad	c/a	c/a
Gráfica		

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y contesta en el paréntesis de la izquierda lo que se te solicita. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1. (   ) Un punto se ubica sobre una rama de la hipérbola, si la diferencia de sus distancias a los focos es 20 unidades, ¿cuál es la distancia a que se encuentran entre si los vértices de la hipérbola?

   a) 20 u
   b) 10 u
   c) 100 u
   d) 400 u

2. (   ) Un punto de una hipérbola se encuentra a 5 cm de uno de los focos y la distancia entre sus vértices es 13 cm, entonces la distancia a que se encuentra del otro foco es:

   a) 8 u
   b) 64 u
   c) 18 u
   d) 324 u

3. (   ) Una hipérbola tiene su centro en el origen y uno de sus vértices tiene coordenadas F(0,8) por lo que la diferencia de las distancias a los focos vale:

   a) 0 u
   b) 16 u
   c) 8 u
   d) 64 u

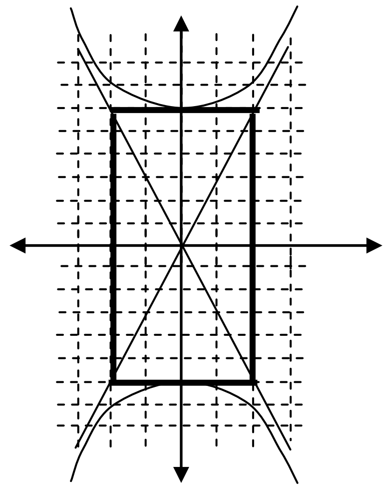
INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y escribe sobre la línea lo que se te solicita.

4. La ecuación general de una hipérbola es $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 68 = 0$, ¿cómo se escribe en su forma ordinaria? ______________________________

5. La ecuación ordinaria de una hipérbola es: $\frac{(x-6)^2}{16} - \frac{(y+7)^2}{9} = 1$

   por lo tanto la ecuación general se escribe como: _______________________________________

6. Analiza la gráfica de la hipérbola. es _____________



La ecuación ordinaria que la representa es: _____________________________

7. En una costa recta se encuentran dos radiofaros a 110 km de distancia uno del otro (ver figura) que emiten simultáneamente una señal de radio. Si un barco avanza hacia la costa sobre una rama de la hipérbola y sabemos que la distancia entre los vértices de la hipérbola es 70 km

I La menor distancia a la que se puede ubicar el barco del faro es ___________________

II la ecuación que representa esta situación se escribe como ________________________

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	A
2	C
3	b
4	$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
5	$9x^2 - 16y^2 - 108x - 224y - 604 = 0$
6	$\frac{-x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$
7	I 20 km II $\frac{x^2}{1225} - \frac{y^2}{4825} = 1$

TEMA 5.3 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

APRENDIZAJES
• Identificar el género de una cónica a partir de la ecuación general de segundo grado.

La ecuación de segundo grado con dos variables, que corresponde a las cónicas, es del tipo: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en esta ecuación no está el término Bxy porque en las curvas los ejes fueron paralelos a los ejes x y y.

Sabemos que los coeficientes A, C, D, E y F son números reales cualesquiera que determinan el tipo de gráfica la cual puede ser una recta, una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola.

Para identificar el tipo de cónica se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Valor de los Coeficientes	Tipo de Cónica	Ejemplo
$A = C = 0$	**Recta**	**$3x + 4y = 0$**
$A = C \neq 0$	**Circunferencia**	**$x^2 + y^2 = 16$**
$A = 0$ o $C = 0$	**Parábola**	**$y^2 + 4x - 2y + 13 = 0$**
$A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y ambos del mismo signo	**Elipse**	**$3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$**
$A \neq 0$, $C \neq 0$ y ambos son de signo contrario	**Hipérbola**	**$5x^2 - 4y^2 + 2x - 1 = 0$**

La ecuación de segundo grado completa tiene la forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, si recordamos de Matemáticas II a la expresión $B^2 - 4AC$ se le denomina indicador o discrimínate que se abrevia con la letra “I”, entonces tenemos cuatro casos:

	Tipo de Cónica	Ejemplo
No existe Bxy	**Circunferencia**	**$x^2 + y^2 - 25 = 0$**
$I = 0$	**Parábola**	**$x^2 - 2xy + y^2 -8x + 16 = 0$**
$I < 0$	**Elipse**	**$x^2 - 3xy - 2 = 0$**
$I > 0$	**Hipérbola**	**$x^2 - 3xy - x + y = 0$**

Veamos la aplicación en los siguientes ejemplos:

Sea la ecuación $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 11 = 0$

Comparando con la ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A = 1$ $C = 1$

Como $A = C$ se trata de una circunferencia.

Analiza este otro caso:
:
Sea la ecuación $7x^2 – 2xy + 7y^2 -24x – 24y + 1 = 0$

En este caso existe el término Bxy, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A = 7$ $B = - 2$ $C = 7$

Utilizaremos el Discriminante: $B^2 – 4AC =$

$$(- 2)^2 – 4(7)(7) =$$

$$4 – 196 = - 192$$

Como $I = - 192$ es negativo se trata de una elipse.

EJERCICIOS:

INSTRUCCIONES. Lee con atención cada uno de los siguientes enunciados y escribe en la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que los complementen correctamente.

1.- Si A = 0 ó C = 0 se tiene una ____.

2.- ecuación $x^2 – 4y^2 – 6x – 16y -11 = 0$ representa a una _________________.

3.- Cuando el Discrimínate “I” es menor de cero se trata de una_________________.

INSTRUCCIONES. Lee con atención los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Si es necesario realiza el procedimiento en hojas aparte.

4.- (   ) La ecuación $3x^2 + 3y^2 – 6x – 6y – 10 = 0$ representa una:

a) Circunferencia
b) Parábola
c) Elipse
d) Hipérbola

5.- (   ) La ecuación $x^2 + 10xy + 25y^2 – 280x – 252y + 1500 = 0$ representa una:

a) Circunferencia
b) Elipse
c) Parábola
d) Hipérbola

6.- (   ) La ecuación $x^2- 3xy + 4y^2 + 7 = 0$ representa una:

a) Circunferencia
b) Elipse
c) Parábola
d) Hipérbola

TABLA DE COMPROBACIÓN

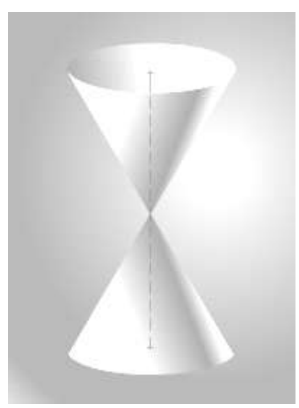
Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1	**parábola**
2	**hipérbola**
3	**elipse**
4	**a**
5	**c**
6	**b**

5.4 SECCIONES DE UN CONO

APRENDIZAJES
• Identificar las cónicas tomando como referencia los cortes que se hacen a un cono de dos mantos.

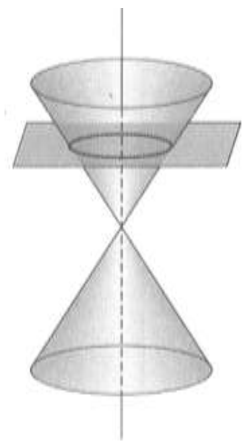
Hasta el momento hemos estudiado a las **curvas llamadas cónicas**, haciendo un análisis que nos llevó a relacionar una ecuación y sus elementos con su gráfica y una gráfica con su ecuación y sus elementos. Dichas curvas se pueden observar geométricamente en antenas parabólicas, puentes colgantes, arcos, domos elípticos, ruedas, tornillos, lámparas, espejos, lentes ópticos, etc., también al realizar ciertos cortes en los alimentos que consumimos, podemos observar estas curvas (ver figura)

La base del cono es un círculo y se dice que tenemos un **cono circular,** si unimos dos conos circulares por sus vértices tenemos un cono de dos mantos.

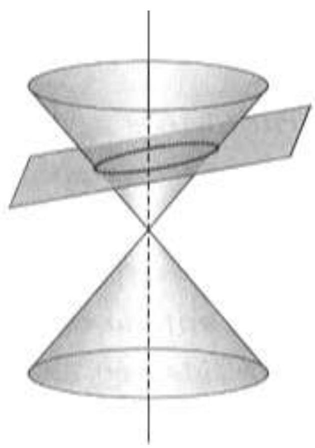


Cuando un plano corta al cono en un lugar distinto al vértice, la curva generada se llama ***cónica***, entonces podemos decir que las **figuras cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola**, se visualizan geométricamente al hacer la intersección de un plano con un cono circular

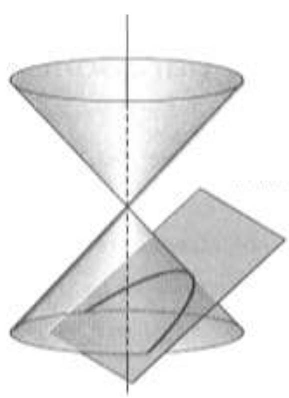
Por ejemplo al utilizar un cono circular y realizar un corte con un **plano paralelo** a la base obtenemos una **circunferencia** como se muestra en la figura.



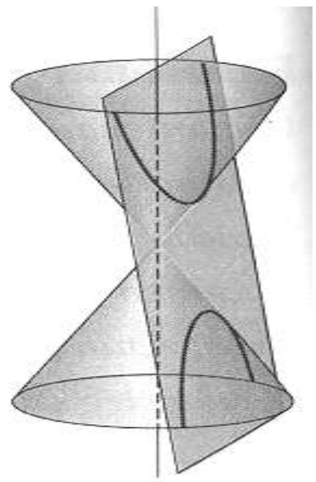
Si realizamos un corte con el **plano en diagonal** sin cortar la base obtenemos una **elipse.**



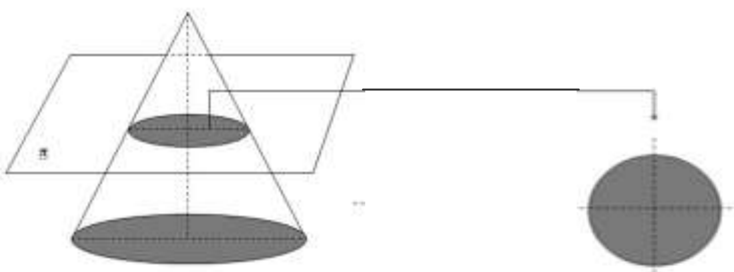
Cuando el plano **corta** en **un** solo **manto** al cono y también **corta la base** tenemos una **parábola.**



Ahora cortemos con el **plano** al cono en los dos mantos, entonces obtenemos la **hipérbola**.



También se puede utilizar un cono simple (de un manto) para obtener algunas de las cónicas



Observa cuidadosamente durante un día todas las figuras geométricas que te rodean y anota aquellas que correspondan a una cónica

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1. (   ) Si un plano corta a un cono en diagonal a un manto sin cortar la base, entonces obtenemos una:

   a) Circunferencia
   b) Parábola
   c) Elipse
   d) hipérbola

2. **(   )** Cuando un cono corta a los dos mantos se tiene una:

   a) Circunferencia
   b) Parábola
   c) Elipse
   d) hipérbola

3. **(   )** Si el plano que corta a un cono en un manto es paralelo a la base, se obtiene una:

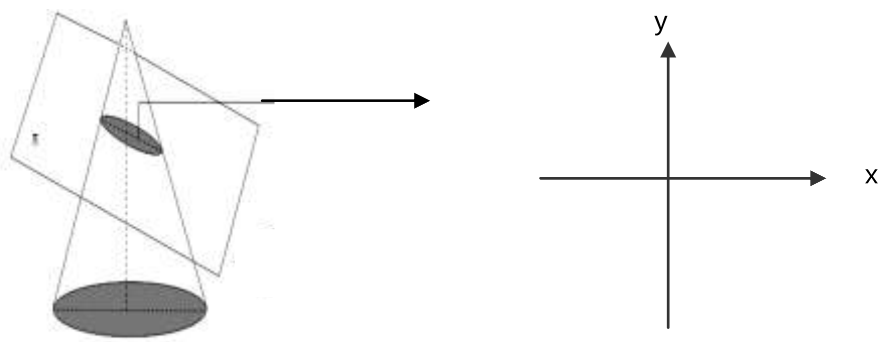
   a) Circunferencia
   b) Parábola
   c) Elipse
   d) hipérbola

4. (   ) Si un plano corta a un cono en un solo manto en diagonal y corta a la base obtenemos una:

   a) Circunferencia
   b) Parábola
   c) Elipse
   d) hipérbola

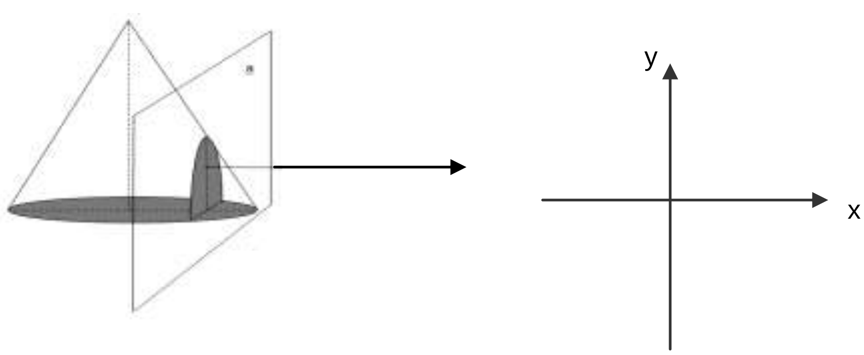
INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

5 Analiza la figura.



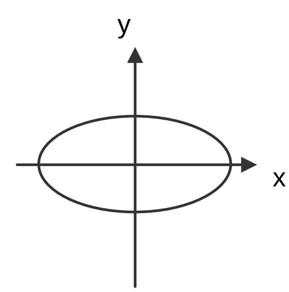
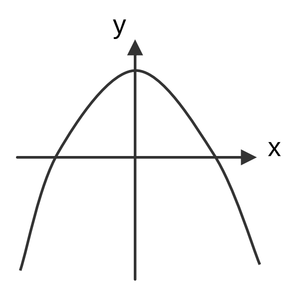
Dibuja en los ejes la cónica que se forma según el corte en el cono.

6. Analiza la figura.



Dibuja en los ejes la cónica que se forma según el corte en el cono.

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	c
2	d
3	a
4	b
5	
6	

TEMA 5.5 LUGARES GEOMÉTRICOS

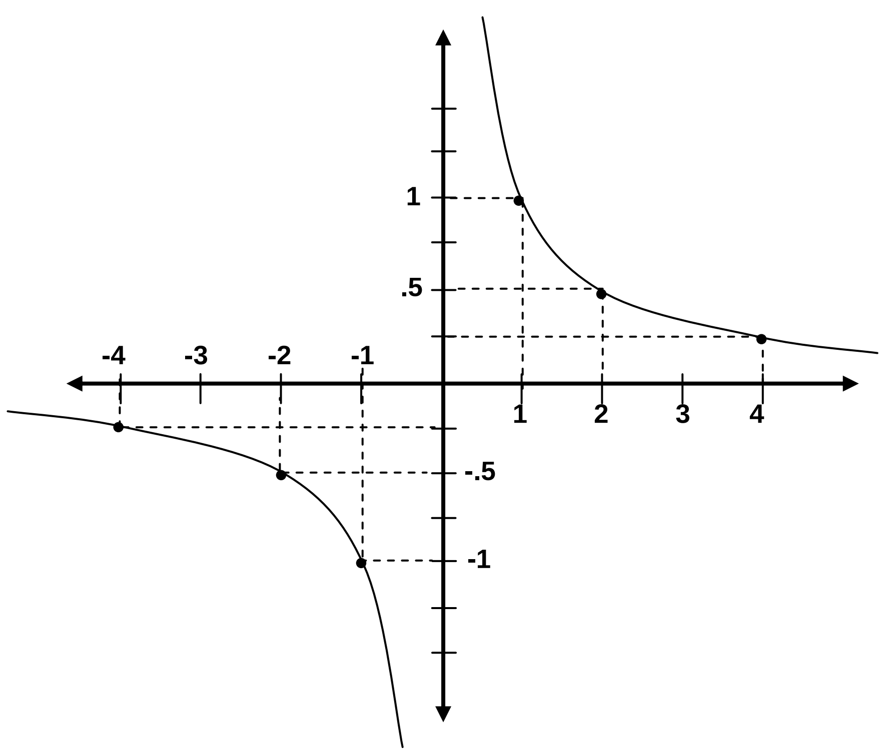
APRENDIZAJES
• Graficar lugares geométricos.

Hasta el momento hemos estudiado las llamadas curvas **cónicas**, podemos saber cuál es su aspecto haciendo un análisis que nos llevó a relacionar una ecuación y sus elementos con su gráfica y a su vez la gráfica con su ecuación y sus elementos.

En muchos casos no es suficiente el análisis de la ecuación para saber cuál es la gráfica. Por ejemplo el lugar geométrico de $y = \frac{1}{x}$, en esta ecuación el único valor para el que la ecuación no esta definida es para **x = 0, ya que la división por cero no esta definida, es decir,** $y = \frac{1}{0}$ no existe. Utilizando otros valores para **"x"** calculamos los correspondientes de **"y"** y elaboramos una tabla como la siguiente:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-0.25	-0.5	-1	1	0.5	0.25

Para visualizar la gráfica, ubicamos los pares de valores en los ejes cartesianos



Veamos otro ejemplo.

Construye la gráfica del lugar geométrico $yx^2 + 2xy = 4$

Despejamos "y" de la ecuación:

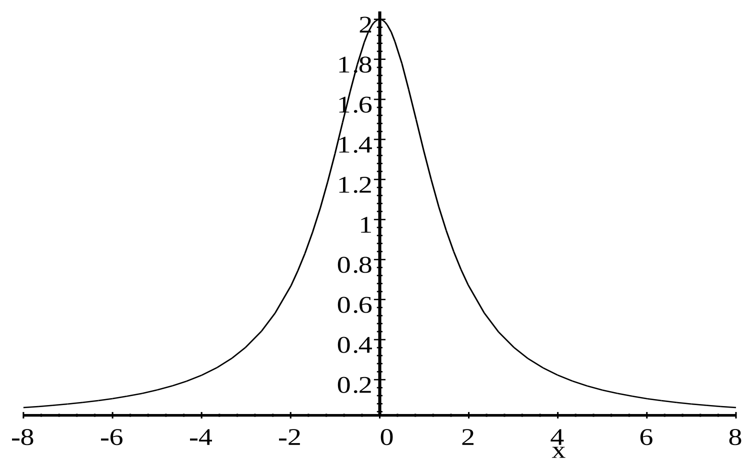
$$y(x^2 + 2) = 4$$

$$y = \frac{4}{x^2 + 2}$$

Tomando valores para x = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, los sustituimos en la ecuación, obtenemos los datos que se presentan en la tabla

x	-8	-6	-4	2	0	2	4	6	8
y	0.06	0.11	0.22	0.67	2	0.67	0.22	0.11	0.06

Graficando las parejas de valores generamos el siguiente lugar geométrico.



EJERCICIOS.

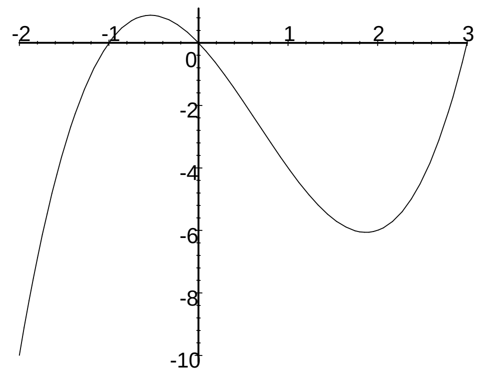
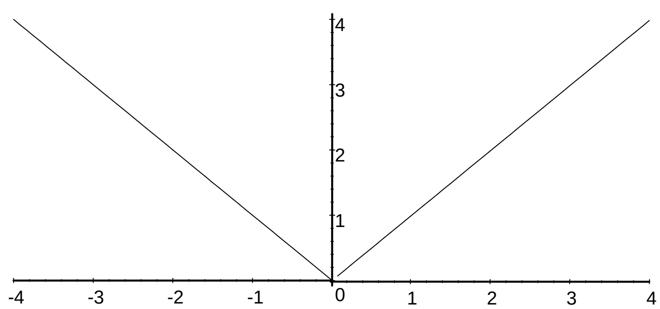
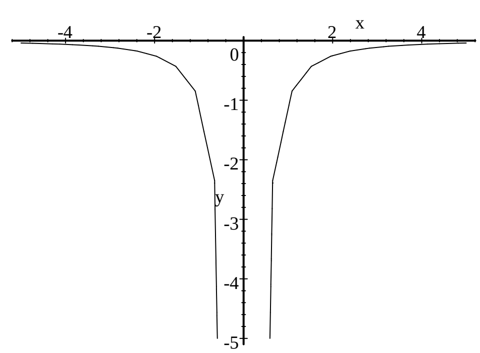
INSTRUCCIONES: Analiza las siguientes ecuaciones y realiza la gráfica del lugar geométrico que corresponde a cada una.

1. $y = x^3 - 2x^2 - 3x$

2. $y = |x|$

3. $y = -\frac{1}{x^2}$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	
2	
3	

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

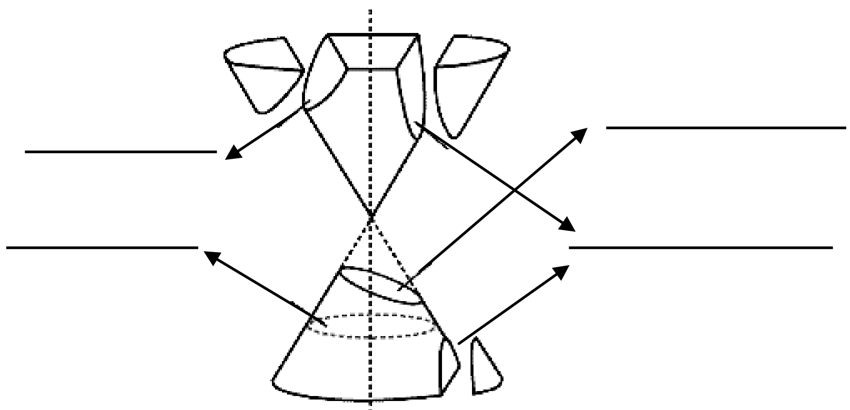
A continuación se te presentan algunos ejercicios, con la finalidad de que reafirmes tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas. Utiliza hojas aparate para efectuar los procedimientos.

Cuentas con 40 minutos para resolverlos.

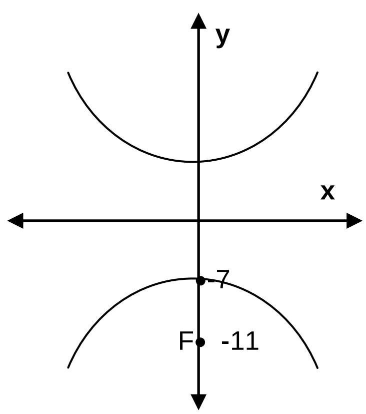
INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y realiza lo que se te solicita. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

1. Escribe el nombre de cada una de las cónicas de acuerdo con los cortes de la figura.

.

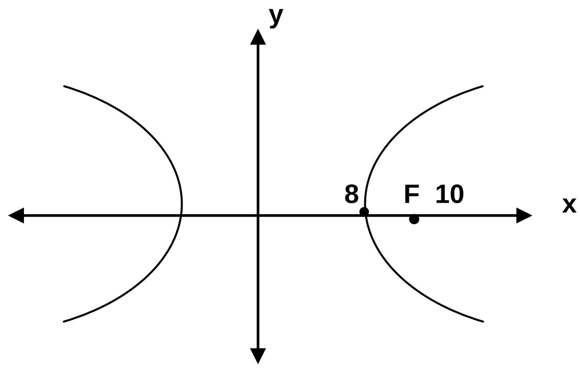


2. Analiza la figura.



Escribe la ecuación que le corresponde a la hipérbola.

3. Analiza la gráfica de la hipérbola siguiente.



Escribe su ecuación. ________________________________

4. Construye la gráfica del lugar geométrico $yx^2 + 2y = -4$

5. Grafica el lugar geométrico cuya ecuación es : $2xy^2 - 4x = 2$

6. Elabora la gráfica del lugar geométrico: $y = \frac{1}{x^2}$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los reactivos y en el paréntesis de la izquierda contesta con la letra que corresponda a la respuesta correcta. Realiza tus operaciones en hojas aparte.

7. ( ) Para qué valores de "**x**" no está definido el lugar geométrico $y = \sqrt{x^2 - 4}$

a) -2 y 4
b) -2 y -4
c) -2 y 2
d) -4 y 4

8. ( ) Un punto se ubica sobre una rama de la hipérbola, si la diferencia de sus distancias a los focos es 24 unidades ¿cuál es la distancia a que se encuentran entre si los vértices de la hipérbola

a) 10 u
b) 100 u
c) 576 u
d) 24 u

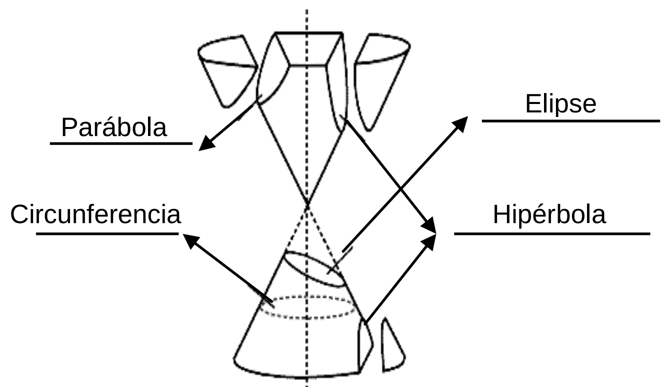
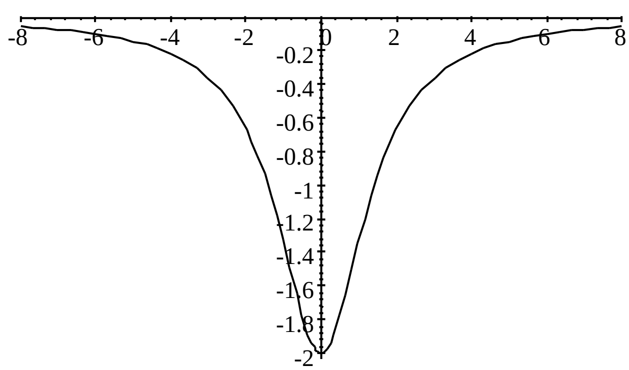
9. ( ) Un punto de una hipérbola se se encuentra a 7 cm de uno de los focos y la distancia entre sus vértices es 15 cm, entonces la distancia a que se encuentra del otro foco es:

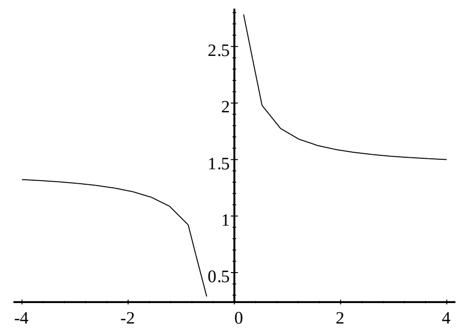
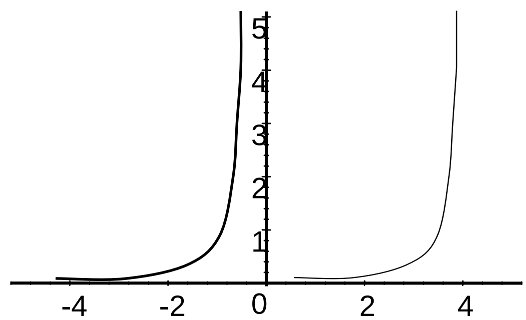
a) 22 u
b) 7 u
c) 49 u
d) 8 u

10. (   ) Una hipérbola tiene su centro en el origen y uno de sus vértices tiene coordenadas F(9,0) por lo que la diferencia de las distancias a los focos vale:

a) 9 u
b) 18 u
c) 0 u
d) 81 u

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	
2	$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{72} = 1$
3	$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
4	

5	
6	
7	c
8	d
9	a
10	b

BIBLIOGRAFÍA

1. BALDOR, AURELIO: *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*. Cultural Mexicana, México, 1994, 387 pp.

2. HEMMERLING M. EDWIN: *Geometría Elemental*. Limusa, México, 1990. 350 pp.

3. GUZMÁN HERRERA, ABELARDO: *Geometría y Trigonometría*. Publicaciones Cultural, México, 1991, 276 pp.

4. CLEMENS, STANLEY/ G. O'DAFFER, PHARES/ J. COONEY, THOMAS*: Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*. Addison Wesley Longman, México 4a. reimpresión, abril 1998, 532 pp.

5. SALAZAR VÁZQUEZ, PEDRO/ SÁNCHEZ GUTIERREZ, SERGIO: *Matemáticas III. Colección nuevo rumbo.* Nueva Imagen, México, 1999. 262 pp.

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN Ó ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de Recuperación o Acreditación Especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Acude al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes mostrar esta guía resuelta al profesor aplicador.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del núm. 2 o 2 ½ .
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las difíciles.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía de estudio para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial de

Matemáticas III

(Versión preliminar)

fue elaborada por la **Secretaría Académica,** a través de la **Dirección de Planeación Académica**, con la colaboración de:

Guadalupe Rodríguez Segundo
Mario L. Flores Fuentes

Revisión técnica
Centro de Evaluación Y Planeación Académica

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional.

Reforma

Diciembre de 2004

Curricular

COLEGIO DE BACHILLERES

Colegio de Bachilleres
www.cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa núm. 105,
Colonia Ex-Hacienda Coapa,
C.P. 04920, Coyoacán, D.F.